Das duale Programm der Erlösmaximierung in der Außenhandelstheorie

Hagen Bobzin

Department of Economics
University of Siegen
Siegen, Germany

Discussion Paper No. 98–01

ISSN 1433-058x

Zusammenfassung: In der Außenhandelstheorie wird das Angebot und die Nachfrage mit Hilfe der Dualitätstheorie abgebildet. Dabei wird auf nationaler Ebene das Problem der Erlösmaximierung untersucht, wobei die nationalen Faktorbestände und die Produktionstechnologien der einzelnen Unternehmen gegeben sind. Unterstellt man Einproduktunternehmen, dann liegt mit der optimalen Faktorallokation auf die Unternehmen gleichzeitig das Güterangebot fest. Analog zur linearen Programmierung wird nun ein zweites Problem untersucht, in dem die Faktorbestände mit Schattenpreisen bewertet werden, so dass die Faktorkosten ein Minimum annehmen. Die entsprechenden Nebenbedingungen verlangen, dass die Stückkosten eines Gutes dessen Preis nicht unterschreiten dürfen. Das zentrale Ergebnis dieser Überlegungen lautet, dass die nationalen Erlöse mit den nationalen Faktorkosten übereinstimmen, also keine positiven Gewinne erzielt werden. Dieser Beitrag zeigt, dass diese Beobachtung kein unmittelbares Ergebnis der Dualitätstheorie ist, so wie es die lineare Programmierung vermuten lässt, sondern wesentlich auf der Annahme linear-homogener Produktionstechnologien beruht.

Schlüsselbegriffe: Außenhandelstheorie, nationale Erlösmaximierung, Dualitätstheorie, Fenchel-Transformation

JEL classification: C61, D20, F10

e-mail: `bobzin@vwl.wiwi.uni-siegen.de`

1 Theoretische Grundlagen

Im Hinblick auf die nationale Erlösmaximierung bei gegebenen Faktorbeständen $\mathbf{v}$ ist von entscheidender Bedeutung, welche Eigenschaften die Menge möglicher Produktionspunkte $P(\mathbf{v})$ aufweist. Ist $P(\mathbf{v})$ konvex[1], dann lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall mit linearen Produktionstechnologien der einzelnen Unternehmen reichen *endlich viele* Hyperebenen aus, das Polyeder $P(\mathbf{v})$ als Restriktionsbereich zu beschreiben. Damit lässt sich die Theorie der linearen Programmierung anwenden, so wie es im Abschnitt 6.5 beschrieben wird. Im zweiten Fall werden *unendlich viele* Hyperebenen benötigt, um den Restriktionsbereich $P(\mathbf{v})$ anzugeben, womit die Methode von Lagrange nicht mehr ohne weiteres eingesetzt werden kann. Hier muss auf das Instrumentarium der konvexen Programmierung zurückgegriffen werden.

Der entsprechende Ansatz wird in Rockafellar (1972) vorstellt und bezieht sich auf die Theorie der Ungleichungen. Dabei werden beste Paare von Funktionen $(f,\ f^*)$ gesucht, die der so genannten Fenchel-Ungleichung

$$f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x}^*) \geqq \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* \qquad \forall\,\mathbf{x},\ \forall\,\mathbf{x}^*$$

genügen, wobei f^* die konjugiert konvexe Funktion zu f genannt wird.[2] Gilt in der obigen Ungleichung an einer Stelle $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}^*)$ die Gleichheit, dann wird $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}^*)$ ein Paar dualer Punkte genannt. Diese Bemerkung ist wichtig, denn wenn $\mathbf{x}$ ein Güterbündel bezeichnet, dann lässt sich der duale Punkt als *Güter*preisvektor $\mathbf{p}$ interpretieren und $\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ bezeichnet den Erlös. Diese Beobachtung unterscheidet sich von der linearen Programmierung wesentlich, denn dort werden die Dualvariablen als Schattenpreise der *Faktor*restriktionen interpretiert.

Unter ökonomischen Aspekten bietet es sich an, die Analyse mit einem Mehrproduktunternehmen zu beginnen, dessen Faktorbestände $\mathbf{v}$ gegeben sind; vgl. hierzu den Abschnitt 2. Damit sind die Faktorkosten bekannt und das Unternehmen sucht einen realisierbaren Produktionsplan $\mathbf{x}$, der den Erlös und damit den Gewinn maximiert. Die optimale Lösung ist durch ein Punktepaar charakterisiert, das sich aus einem Güterbündel $\mathbf{x}$ und den Güterpreisen $\mathbf{p}$ zusammensetzt. Der folgende Abschnitt 3 ergänzt die analogen Überlegungen zur Kostenminimierung und beschreibt das Verhalten der Unternehmung, wenn es das Ziel der Gewinnmaximierung verfolgt.

Im Abschnitt 4 wird die weltweite Erlösmaximierung analysiert, wobei die nationalen Faktorbestände gegeben sind. Im Gegensatz zur nationalen Erlösmaximierung im Abschnitt 5 wird unterstellt, dass die Produktionsfaktoren auf internationaler Ebene vollkommen immobil sind.

[1] Damit liegt eine konkave Transformationskurve vor.
[2] Newman (1987) spricht an dieser Stelle von der konvexen Fenchel Transformation.

Eine Reallokation zwischen den Ländern ist hier nicht möglich. Dagegen können die Produktionsfaktoren auf nationaler Ebene sehr wohl zwischen den Unternehmen umverteilt werden. Hier reicht es nicht aus, den Erlös für eine gegebene Faktorallokation zu maximieren. Vielmehr ist die optimale Faktorallokation auf die Unternehmen zu bestimmen. Dieses Problem ist analog bereits für die Mehrproduktunternehmung dargestellt worden. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Faktorbestände aus nationaler Sicht gegeben sind, während ein Unternehmen die gewinnmaximale Faktornachfrage auswählen kann.

Im abschließenden Abschnitt 6 wird gezeigt, wie das Problem der nationalen Erlösmaximierung mit der Minimierung der Faktorkosten zusammenhängt. Beide Probleme sind im Allgemeinen nicht dual zueinander. Wenn man jedoch eine linear-homogene Produktionstechnologie unterstellt, dann schließt jede zulässige Lösung positive Gewinne aus, so dass die Erlöse mit den Kosten übereinstimmen.

2 Erlösmaximierung eines Mehrproduktunternehmens

Die Produktionstechnologie P eines Unternehmens oder eines Landes, das über die Faktormengen $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)^\mathsf{T}$ verfügt und die Gütermengen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ herstellt, lässt sich über die Indikatorfunktion δ wie folgt beschreiben:

$$\delta(\mathbf{x}|P(\mathbf{v})) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \mathbf{x} \in P(\mathbf{v}) \text{, d.h., } (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \text{ ist eine zulässige Aktivität.} \\ \infty & \text{wenn } \mathbf{x} \notin P(\mathbf{v}) \text{, d.h., die Aktivität } (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \text{ ist unzulässig.} \end{cases}$$

Die konjugiert konvexe Funktion δ^* der Indikatorfunktion δ ist nachstehend definiert und bezeichnet den maximalen Erlös r des betrachteten Unternehmens oder Landes.

(P1) $$r(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv \delta^*(\mathbf{p}|P(\mathbf{v})) = \sup_{\mathbf{x}} \left\{\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \delta(\mathbf{x}|P(\mathbf{v}))\right\}$$

Unter bestimmten Regularitätsannahmen, die in Bobzin (1998) vorstellt werden, gilt nach dem Fenchel-Moreau-Theorem für die bikonjugierte Funktion

(D1) $$\delta(\mathbf{x}|P(\mathbf{v})) = \delta^{**}(\mathbf{x}|P(\mathbf{v})) = \sup_{\mathbf{p}} \left\{\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \delta^*(\mathbf{p}|P(\mathbf{v}))\right\}.$$

Neben dem Funktionenpaar (δ, δ^*) gibt es also ein zweites Paar (δ^*, δ^{**}), das mit dem ersten Paar zusammenfällt, wenn $\delta \equiv \delta^{**}$ gilt. Bei optimaler Wahl der Güterpreise $\mathbf{p}$ nimmt die Zielfunktion ihren maximalen Wert 0 an. Ökonomisch ausgedrückt, ist $\hat{\mathbf{p}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = r(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{v})$ genau dann erfüllt, wenn $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v})$ eine technisch zulässige Aktivität ist.

Sofern die Menge $P(\mathbf{v})$ nicht leer, konvex und abgeschlossen ist, lassen sich nach Rockafellar (1972, Theorem 23.5) für das Funktionenpaar (r, δ) fünf zueinander äquivalente Bedingungen in Bezug auf das Punktepaar $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})$ angeben:

(1a) $\hat{\mathbf{p}} \in \partial\delta(\hat{\mathbf{x}}|P(\mathbf{v}))$ (Normalenkegel der Menge $P(\mathbf{v})$ an der Stelle $\hat{\mathbf{x}}$)

(1b) $\hat{\mathbf{x}} \in \partial r(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{v})$

(1c) $\hat{\mathbf{p}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} - \delta(\mathbf{x}|P(\mathbf{v}))$ nimmt sein Maximum bezüglich $\mathbf{x}$ an der Stelle $\hat{\mathbf{x}}$ an.

(1d) $\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} - r(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ nimmt sein Maximum bezüglich $\mathbf{p}$ an der Stelle $\hat{\mathbf{p}}$ an.

(1e) $\delta(\hat{\mathbf{x}}|P(\mathbf{v})) + r(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{p}}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}}$

Insbesondere durch die Bedingungen (1c) – (1e) kommt die Dualität der beiden Probleme (P1) und (D1) zum Ausdruck. Die Bedingungen (1a) und (1b) sind nur deswegen ungewohnt, weil in ihnen das mit ∂ bezeichnete Subdifferential auftritt. Unterstellt man die Differenzierbarkeit der beiden Funktionen δ und r, dann geht das Subdifferential in den gewohnten Gradienten

$$\hat{\mathbf{p}} = \nabla\delta(\hat{\mathbf{x}}|P(\mathbf{v}))$$

über, wobei $\hat{\mathbf{p}}$ den Normalenvektor der Menge $P(\mathbf{v})$ an der Stelle $\hat{\mathbf{x}}$ bezeichnet. Analog gibt (1b) bei Differenzierbarkeit die Angebotsfunktionen an,

$$\hat{\mathbf{x}} = \nabla r(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{v}).$$

Für den Fortgang der Analyse ist es hilfreich, die Bedingungen (2) im Auge zu behalten; sie treten in abgewandelter Form in den Bedingungen (7), (8) und (10) wieder auf.

3 Gewinnmaximierung eines Mehrproduktunternehmens

Die obige Output-Technologie P lässt sich vollkommen äquivalent durch die inverse Input-Technologie L beschreiben, wobei die Mengen möglicher Produktionspunkte $P(\mathbf{v})$ und die Inputbedarfsmengen $L(\mathbf{x})$ der folgenden Äquivalenzrelation unterliegen:

(2) $$\mathbf{x} \in P(\mathbf{v}) \iff \mathbf{v} \in L(\mathbf{x})$$

Die Beschreibung der Produktionstechnologie erfolgt nun nicht mehr durch die obige Indikatorfunktion δ, sondern durch die reziproke Indikatorfunktion ρ mit

$$\rho(\mathbf{v}|L(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathbf{v} \in L(\mathbf{x}); \\ -\infty, & \text{wenn } \mathbf{v} \notin L(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung von (2) gilt demnach $\delta(\mathbf{x}|P(\mathbf{v})) = -\rho(\mathbf{v}|L(\mathbf{x}))$. Der Grund für die Umstellung liegt darin, dass sich die Kostenfunktion c nun im Wege der konjugiert *konkaven* Funktion ρ_* bestimmen lässt.[3]

$$c(\mathbf{q},\mathbf{x}) \equiv \rho_*(\mathbf{q}|L(\mathbf{x})) = \inf_{\mathbf{v}} \left\{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} - \rho(\mathbf{v}|L(\mathbf{x}))\right\} \tag{3}$$

Ohne auf die zu (1) analogen Bedingungen näher einzugehen, stellen sich nun zwei Folgeprobleme, nämlich die Gewinnmaximierung von der Inputseite und von der Outputseite.

Inputseite $\quad r(\mathbf{p},\mathbf{v}) - \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \sup_{\mathbf{x}} \left\{\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} |\ \mathbf{x} \in P(\mathbf{v})\right\}$ mit $\mathbf{v}$ als Parameter

Outputseite $\quad \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - c(\mathbf{q},\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{v}} \left\{\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} |\ \mathbf{v} \in L(\mathbf{x})\right\}$ mit $\mathbf{x}$ als Parameter

Beide Probleme haben gemäß (2) äquivalente Nebenbedingungen und die Zielfunktionen stimmen überein. Eine einfache Umstellung beider Probleme liefert unmittelbar:

$$r(\mathbf{p},\mathbf{v}) - \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \sup_{\mathbf{x}} \left\{\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x}|P(\mathbf{v}))\right\} - \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} \text{ gegeben} \tag{4}$$

$$\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - c(\mathbf{q},\mathbf{x}) = \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \inf_{\mathbf{v}} \left\{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} - \rho(\mathbf{v}|L(\mathbf{x}))\right\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \text{ gegeben} \tag{5}$$

Unter dem Aspekt der Gewinnmaximierung ist also mindestens eines der beiden folgenden Probleme zu lösen

$$-\pi(\mathbf{p},\mathbf{q}) \equiv r_*(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \inf_{\mathbf{v}} \left\{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} - r(\mathbf{p},\mathbf{v}) |\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\right\} \tag{6a}$$

$$\pi(\mathbf{p},\mathbf{q}) \equiv c^*(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{x}} \left\{\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - c(\mathbf{q},\mathbf{x}) |\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\right\} \tag{6b}$$

Nach wie vor werden Paare von Funktionen betrachtet, nämlich (r, r_*) im ersten Fall und (c, c^*) im zweiten Fall. Damit erscheint es plausibel zu sein, die zu (1) analogen Bedingungen zu untersuchen. Man beachte jedoch, dass die Erlösfunktion r und der negative Gewinn $r_* \equiv -\pi$ konkav in $\mathbf{v}$ beziehungsweise $\mathbf{q}$ sind. Unter ähnlichen Regularitätsannahmen wie zuvor lauten die fünf zueinander äquivalenten Bedingungen in Bezug auf das Punktepaar $(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{q}})$

(7a) $\quad \hat{\mathbf{v}} \in -\Delta_{\mathbf{q}}\, \pi(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{q}})$

(7b) $\quad \hat{\mathbf{q}} \in \Delta_{\mathbf{v}}\, r(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}})$

(7c) $\quad \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\mathbf{v} - r(\mathbf{p},\mathbf{v})$ nimmt sein Minimum bezüglich $\mathbf{v}$ an der Stelle $\hat{\mathbf{v}}$ an.

(7d) $\quad \mathbf{q}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}} + \pi(\mathbf{p},\mathbf{q})$ nimmt sein Minimum bezüglich $\mathbf{q}$ an der Stelle $\hat{\mathbf{q}}$ an.

(7e) $\quad r(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}) - \pi(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}}$

[3] Im Gegensatz zu konjugiert konvexen Funktionen, wie etwa δ^*, die durch einen hochgestellten Stern gekennzeichnet sind, werden konjugiert konkave Funktionen, wie etwa ρ_*, mit einem tiefgestellten Stern versehen.
Die Eigenschaften der Indikatorfunktion ρ und der Kostenfunktion c werden in Bobzin (1998, S. 130 ff.) diskutiert.

Da hier konkave Funktionen untersucht werden, sind die *Sub*differentiale in (1a) und (1b) nun durch *Super*differentiale, die mit Δ bezeichnet werden, zu ersetzen. Beide Begriffe sind durch Ungleichungen definiert, die sich nur durch die entgegengesetzte Ungleichheit unterscheiden. Unterstellt man wiederum, dass die betrachteten Funktionen differenziebar sind, dann stellen sich auch hier die vertrauteren Gradientenbedingungen ein

$$\hat{\mathbf{v}} = -\nabla_{\mathbf{q}}\, \pi(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{q}}) \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{v}}\, r(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}),$$

wobei der erste Gradient den Funktionen der Faktornachfrage entspricht.

Das zweite Funktionenpaar (c, c^*) enthält die bezüglich $\mathbf{x}$ konvexe Kostenfunktion c und die bezüglich $\mathbf{p}$ konvexe Gewinnfunktion $c^* \equiv \pi$. Damit können die fünf zueinander äquivalenten Bedingungen in (1) unmittelbar übertragen werden:

(8a) $\hat{\mathbf{x}} \in \partial_{\mathbf{p}}\, \pi(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q})$

(8b) $\hat{\mathbf{p}} \in \partial_{\mathbf{x}}\, c(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{x}})$

(8c) $\hat{\mathbf{p}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} - c(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ nimmt sein Maximum bezüglich $\mathbf{x}$ an der Stelle $\hat{\mathbf{x}}$ an.

(8d) $\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} - \pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ nimmt sein Maximum bezüglich $\mathbf{p}$ an der Stelle $\hat{\mathbf{p}}$ an.

(8e) $c(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{x}}) + \pi(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) = \hat{\mathbf{p}}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}}$

Nach wie vor gehen die beiden Subdifferentiale in (8a) und (8b) in die entsprechenden Gradienten über, wenn man die Differenzierbarkeit der Funktionen unterstellt.

$$\hat{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{p}}\, \pi(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{p}} = \nabla_{\mathbf{x}}\, c(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{x}})$$

Der erste Ausdruck bezeichnen nun nichts anderes als die Funktionen für das Güterangebot, während die zweite Bedingung die Grenzkosten-Preis-Regel beinhaltet.

4 Weltweite Erlösmaximierung

Die bisherigen Überlegungen werden nun auf den Fall mehrerer Länder ($b = 1, \dots, \nu$) übertragen. Bei Produktionsfaktoren, die zwischen den Ländern *immobil* sind, ist die weltweite Faktorallokation $\mathfrak{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\nu)$ auf die ν Länder gegeben. Darüber hinaus verfügt jedes Land über eine eigene Produktionstechnologie $P_b(\mathbf{v}_b)$, $b = 1, \dots, \nu$.

Die folgende Indikatorfunktion nimmt genau dann den Wert 0 an, wenn der weltweite Output $\mathbf{x}$ bei der gegebenen Faktorallokation $\mathfrak{v}$ und gegebenen Technologien hergestellt werden kann.

(P2) $\delta(\mathbf{x}, \mathfrak{v}) = \inf_{\mathfrak{x}} \left\{ \delta_1(\mathbf{x}_1 | P_1(\mathbf{v}_1)) + \cdots + \delta_\nu(\mathbf{x}_\nu | P_\nu(\mathbf{v}_\nu)) \,|\, \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_\nu = \mathbf{x} \right\}$

Die zugehörige konjugiert konvexe Funktion ist wie in (P1) definiert als

(D2) $$\delta^*(\mathbf{p}, \mathfrak{v}) = \sup_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \delta(\mathbf{x}, \mathfrak{v}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

und bezeichnet nichts anderes als den maximalen weltweiten Erlös $r(\mathbf{p}, \mathfrak{v})$ bei der gegebenen Faktorallokation $\mathfrak{v}$ und den Güterpreisen $\mathbf{p}$, wobei die Nebenbedingung darin besteht, dass der weltweite Output $\mathbf{x}$ herstellbar ist.

Anmerkung zur Schreibweise:

- In der Literatur zur konvexen Analysis wird die Schreibweise $\delta(\mathbf{x}, \mathfrak{v}) = (\delta_1 \square \cdots \square \delta_\nu)(\mathbf{x}, \mathfrak{v})$ verwendet. Man betont damit die Rechenoperation der sogenannten Faltung, d.h., die konvexe Fenchel-Transformation wird auf eine Summe von Funktionen angewendet; vgl. Aubin (1979).
- Nach wie vor kennzeichnet das Symbol δ die Indikatorfunktion einer Menge. Im vorliegenden Fall handelt es sich bei dieser Menge um die Summe der nationalen Mengen möglicher Produktionspunkte, d.h. $P_\Sigma(\mathfrak{v}) = P_1(\mathbf{v}_1) + \cdots + P_\nu(\mathbf{v}_\nu)$. In der Literatur zur Außenhandelstheorie wird der Rand dieser Menge in der Regel als Welttransformationskurve dargestellt. Aus Gründen der Vereinfachung wird die korrekte Schreibweise der Indikatorfunktion $\delta(\mathbf{x} | P_\Sigma(\mathfrak{v}))$ verkürzt zu $\delta(\mathbf{x}, \mathfrak{v})$.

Sind gewisse Regularitätsannahmen erfüllt, dann gilt auch hier

(P2') $$\delta(\mathbf{x}, \mathfrak{v}) = \delta^{**}(\mathbf{x}, \mathfrak{v}) = \sup_{\mathbf{p}} \left\{ \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \delta^*(\mathbf{x}, \mathfrak{v}) \mid \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Während in (D2) ein erlösmaximales Güterbündel $\mathbf{x}$ gesucht wird, wird im dualen Programm (P2') nach einem optimalen Vektor von Güterpreisen $\mathbf{p}$ gesucht. Hat man einen derartigen Preisvektor gefunden, dann nimmt die Zielfunktion in (P2') den Wert 0 an und das ist genau dann der Fall, wenn das Ausgangsproblem (P2) eine technisch realisierbare Güterallokation $\mathfrak{x}$ besitzt.

Bei genauerer Untersuchung der Erlösfunktion in (D2) zeigt sich, dass $\delta^*(\mathbf{p}, \mathfrak{v})$ in eine Summe zerfällt,

$$\delta^*(\mathbf{p}, \mathfrak{v}) = \delta_1^*(\mathbf{p} | P_1(\mathbf{v}_1)) + \cdots + \delta_\nu^*(\mathbf{p} | P_\nu(\mathbf{v}_\nu)).$$

Damit und unter Berücksichtigung von (D1) setzt sich der weltweite maximale Erlös als Summe der nationalen maximalen Erlöse zusammen,

(9) $$r(\mathbf{p}, \mathfrak{v}) = r_1(\mathbf{p}, \mathbf{v}_1) + \cdots + r_\nu(\mathbf{p}, \mathbf{v}_\nu).$$

Entsprechend zu (1) gelten auch für das neue Funktionenpaar (δ, r) die folgenden fünf äquivalenten Bedingungen:

(10a) $\hat{\mathbf{p}} \in \partial\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathfrak{v})$ (Normalenkegel der Menge $P_\Sigma(\mathbf{v})$ an der Stelle $\hat{\mathbf{x}}$)

(10b) $\hat{\mathbf{x}} \in \delta\, r(\mathbf{p}, \mathfrak{v})$

(10c) $\hat{\mathbf{p}}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \delta(\mathbf{x}, \mathfrak{v})$ nimmt sein Maximum bezüglich $\mathbf{x}$ an der Stelle $\hat{\mathbf{x}}$ an.

(10d) $\mathbf{p}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} - r(\mathbf{p}, \mathfrak{v})$ nimmt sein Maximum bezüglich $\mathbf{p}$ an der Stelle $\hat{\mathbf{p}}$ an.

(10e) $\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathfrak{v}) + r(\hat{\mathbf{p}}, \mathfrak{v}) = \hat{\mathbf{p}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}}$

Bei Differenzierbarkeit reduzieren sich die ersten beiden Bedingungen auf die Gradienten

$$\hat{\mathbf{p}} = \nabla_\mathbf{x}\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathfrak{v}) \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{x}} = \nabla_\mathbf{p} r(\hat{\mathbf{p}}, \mathfrak{v}),$$

wonach $\hat{\mathbf{p}}$ senkrecht auf der Welttransformationskurve steht und $\hat{\mathbf{x}}$ das weltweite Güterangebot bezeichnet. Dieses Angebot kann nun entsprechend (9) in die nationalen Angebotsfunktionen zerlegt werden

$$\hat{\mathbf{x}}_b = \nabla\, r_b(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{v}_b) \qquad b = 1, \ldots, \nu$$

Wie Newman (1987, Lemma 4) zeigt, lassen sich das optimale weltweite Angebot und die entsprechenden nationalen Angebote über eine weitere äquivalente Bedingung beschreiben,

$$\hat{\mathbf{p}} \in \bigcap_{b=1}^{\nu} \partial\delta_b(\hat{\mathbf{x}}_b | P_b(\mathbf{v}_b)).$$

Falls auch nur eine der enthaltenen Indikatorfunktionen δ_b an der Stelle $\hat{\mathbf{x}}_b$ differenzierbar ist, dann müssen im Optimum dieselben Güterpreise $\hat{\mathbf{p}}$ für alle Länder, $b = 1, \ldots, \nu$, gelten.

5 Nationale Erlösmaximierung

Auf nationaler Ebene gestaltet sich das Problem der Erlösmaximierung schwieriger, weil hier die Produktionsfaktoren zwischen den Unternehmen mobil sind. Interpretiert man $r(\mathbf{p}, \mathfrak{v})$ als nationalen Erlös, wobei $b = 1, \ldots, \nu$ nun die Unternehmen kennzeichnet, dann kann nicht mehr von einer gegebenen Allokation $\mathfrak{v}$ ausgegangen werden. Vielmehr müssen sämtliche Faktorallokationen berücksichtigt werden, so dass nun die erlösmaximale Faktorallokation bei gegebener nationaler Faktorausstattung $\mathbf{v}$ gesucht wird.

(P3) $$R(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \max_{\mathfrak{v}} \left\{ r(\mathbf{p}, \mathfrak{v}) | \; \mathbf{v} \geqq \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_\nu \right\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\nu)$$

Obwohl die Faktorbestände $\mathbf{v}$ gegeben sind, ist es hilfreich sich die zugehörige konjugiert konkave Funktion anzusehen,

$$\text{(D3)} \qquad R_*(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \inf_{\mathbf{v}} \left\{ \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} - R(\mathbf{p},\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \right\},$$

die verlangt den negativen nationalen Gewinn aller Unternehmen zu minimieren. Denn nun wird deutlich, dass die Suche nach einer optimalen Faktorallokation entsprechend (P3) mit der Suche nach einem optimalen Vektor von Faktorpreisen übereinstimmt:

$$\text{(P3')} \qquad R(\mathbf{p},\mathbf{v}) = R_{**}(\mathbf{p},\mathbf{v}) = \inf_{\mathbf{q}} \left\{ \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} - R_*(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m \right\}$$

Damit stellen sich auf nationaler Ebene analoge Optimumbedingungen ein, die gemäß (7) auf der Ebene gewinnmaximierender Mehrproduktunternehmen gelten.

Um den Rückbezug zu den einzelnen Unternehmen in der Volkswirtschafts herzustellen, wird nun die Lagrange-Funktion zu (P3) mit den Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ untersucht.

$$\text{(11)} \qquad \mathcal{L}(\mathfrak{v},\boldsymbol{\lambda}) = r(\mathbf{p},\mathfrak{v}) + \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \cdots - \mathbf{v}_\nu)$$

Da sich der nationale Erlös als Summe der unternehmensspezifischen Erlöse $r_b(\mathbf{p},\mathbf{v}_b)$ darstellen lässt, folgt

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}(\mathfrak{v},\boldsymbol{\lambda}) &= r_1(\mathbf{p},\mathbf{v}_1) + \cdots + r_\nu(\mathbf{p},\mathbf{v}_\nu) + \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \cdots - \mathbf{v}_\nu) \\ &= \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}\mathbf{v} + \sum_b \left(r_b(\mathbf{p},\mathbf{v}_b) - \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}\mathbf{v}_b \right) \end{aligned}$$

Identifiziert man nun die Schattenpreise $\boldsymbol{\lambda}$ als die Marktpreise $\mathbf{q}$, dann genügt ein optimales Paar $(\hat{\mathfrak{v}},\hat{\mathbf{q}})$ der Sattelpunktbedingung

$$\mathcal{L}(\mathfrak{v},\hat{\mathbf{q}}) \leqq \mathcal{L}(\hat{\mathfrak{v}},\hat{\mathbf{q}}) \leqq \mathcal{L}(\hat{\mathfrak{v}},\mathbf{q}) \qquad \forall\, \mathfrak{v},\ \forall\, \mathbf{q},$$

die bei Differenzierbarkeit äquivalent zu den linearisierten Kuhn-Tucker Bedingungen ist:

$$\text{(13a)} \qquad \nabla_{\mathbf{v}_b}\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{v}},\hat{\mathbf{q}}) = \nabla_{\mathbf{v}_b} r_b(\mathbf{p},\hat{\mathbf{v}}_b) - \hat{\mathbf{q}} \leqq \mathbf{0}; \qquad \hat{\mathbf{v}}_b \geqq \mathbf{0}; \qquad \nabla_{\mathbf{v}_b} r_b(\mathbf{p},\hat{\mathbf{v}}_b)^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}}_b = \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}}_b, \quad b = 1,\ldots,\nu;$$

$$\text{(13b)} \qquad \nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{v}},\hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}_1 - \cdots - \hat{\mathbf{v}}_\nu \geqq \mathbf{0}; \qquad \hat{\mathbf{q}} \geqq \mathbf{0}; \qquad \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}}_1 + \cdots + \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}}_\nu.$$

Für eine innere Lösung mit positiven Faktorpreisen $\hat{\mathbf{q}} > \mathbf{0}$ muss das nationale Faktorangebot $\mathbf{v}$ mit den auf die Unternehmen zugeordneten Faktormengen $\hat{\mathfrak{v}}$ übereinstimmen. Man beachte, dass eine optimale Allokation $\hat{\mathfrak{v}}$ bisher quasi von einer übergeordneten nationalen Instanz ermittelt worden ist. Allerdings ist noch nicht die Frage beantwortet worden, unter welchen Bedingungen der Inputvektor $\hat{\mathbf{v}}_b$ von dem einzelnen Unternehmen b auch tatsächlich nachgefragt wird. Im Abschnitt über die Gewinnmaximierung ist bereits gezeigt worden, dass der Vektor $\hat{\mathbf{v}}_b$ genau dann nachgefragt wird, $\hat{\mathbf{v}}_b \in -\Delta_{\mathbf{q}}\,\pi_b(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{q}})$, wenn $\hat{\mathbf{q}} \in \Delta_{\mathbf{v}_b} r_b(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_b)$ erfüllt ist. Demnach muss an dieser Stelle lediglich gezeigt werden, dass die Sattelpunktbedingung diesen Subgradienten als Spezialfall einschließt. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit erhält man für das erste Unternehmen (sämtliche Relationen müssen für alle $\mathbf{v}_1 \geqq \mathbf{0}$ erfüllt sein):

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \ldots, , \hat{\mathbf{v}}_\nu, \hat{\mathbf{q}}) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_\nu, \hat{\mathbf{q}}) \\
\iff & \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\mathbf{v} + r_1(\mathbf{p}, \mathbf{v}_1) - \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\mathbf{v}_1 + \sum_{b=2}^{\nu} \big(r_b(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_b) - \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}}_b\big) \leq \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\mathbf{v} + \sum_{b=1}^{\nu} \big(r_b(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_b) - \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}}_b\big) \\
\iff & r_1(\mathbf{p}, \mathbf{v}_1) - \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\mathbf{v}_1 \leq r_1(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_1) - \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}}_1 \\
\iff & r_1(\mathbf{p}, \mathbf{v}_1) \leq r_1(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_1) - \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}(\mathbf{v}_1 - \hat{\mathbf{v}}_1) \qquad \text{(Definition für einen Subgradienten } \hat{\mathbf{q}}\text{)} \\
\iff & \hat{\mathbf{q}} \in \Delta_{\mathbf{v}_1} r_1(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_1) \\
\iff & \hat{\mathbf{v}}_1 \in -\Delta_{\mathbf{q}}\,\pi_1(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{q}}) \qquad \text{(gewinnmaximale Faktornachfrage)}
\end{aligned}
$$

Falls der Vektor $\hat{\mathbf{v}}_b$ unter dem Aspekt der Gewinnmaximierung optimal ist und ein Unternehmen b den Input i in positiver Menge ($\hat{v}_{ib} > 0$) nachfragt, dann gilt bei Differenzierbarkeit der Erlösfunktion $\partial r_b(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_b)/\partial v_{ib} = \hat{q}_i$. Für die Einproduktunternehmung (mit $b = j$) erhält man

$$
r_j(p_j, \hat{\mathbf{v}}_j) = p_j f_j(\hat{\mathbf{v}}_j) \implies p_j \frac{\partial f_j(\hat{\mathbf{v}}_j)}{\partial v_{ij}} = \hat{q}_i,
$$

wonach die Faktoren entsprechend ihrer monetären Grenzproduktivität entlohnt werden.

6 Kostenminimierung auf nationaler Ebene

6.1 Das duale Programm der Kostenminimierung

Abschließend wird untersucht, wie das Problem der nationalen Erlösmaximierung (P3) mit der Minimierung der nationalen Faktorkosten zusammenhängt. Dabei wird die gesamte Volkswirtschaft zur Vereinfachung wie ein einziges Mehrproduktunternehmen interpretiert, so dass (3) den relevanten Ansatzpunkt liefert. Man beachte, dass nun den gegebenen nationalen Faktorbestände $\mathbf{v}$ die zu ermittelnden Faktorpreise $\mathbf{q}$ gegenübergestellt wird. Das zu (3) duale Problem lautet

(14) $$\rho(\mathbf{v}|L(\mathbf{x})) = \rho_{**}(\mathbf{v}|L(\mathbf{x})) = \inf_{\mathbf{q}} \big\{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} - \rho_*(\mathbf{v}|L(\mathbf{x}))|\ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m\big\}.$$

Wie bei der Dualität der Erlösmaximierung (P1) und (D1), stellt sich heraus, dass man genau dann optimale Faktorpreise $\hat{\mathbf{q}}$ gefunden hat, wenn $\rho_*(\hat{\mathbf{q}}|L(\mathbf{x})) \equiv c(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\mathbf{v}$ oder äquivalent

$\rho(\mathbf{v}|L(\mathbf{x})) = 0$ erfüllt ist. Aus ökonomischer Sicht geht es darum, solche Faktorpreise zu finden, bei denen die technisch realisierbare Aktivität $(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ kostenminimal durchgeführt wird. Lassen sich für eine zulässige Aktivität keine derartigen Faktorpreise bestimmen, dann befindet man sich im Inneren der Menge möglicher Produktionspunkte. Um auf die Transformationskurve zu gelangen müssen hier die Gütermengen $\mathbf{x}$ angepasst werden, denn die nationalen Faktorbestände $\mathbf{v}$ sind fixiert.

Nun liegt es nahe die Probleme (P3') und (14) miteinander zu vergleichen. Zum einen weisen beide Probleme das gleiche Konstruktionsprinzip auf und zum anderen steht die Vermutung im Raum, dass die Erlösmaximierung entsprechend (P3') mit dem dualen Programm der Kostenminimierung, also (14), übereinstimmt. Dabei wird unmittelbar klar, dass beide Programme vollkommen unterschiedliche Aussagen liefern. Während ein optimaler Preisvektor in (P3') ein Erlösmaximum determiniert, besagt ein optimaler Preisvektor in (14), dass die betrachtete Aktivität technisch realisierbar ist.

6.2 Lagrange-Dualität

Den entscheidenden Ansatzpunkt für die weitere Analyse liefert die Lagrange-Funktion (12). Darin geben die Klammerausdrücke unter der Summe den Gewinn der jeweiligen Unternehmung b an. Es fällt auf, dass sich die Variablen $\mathbf{v}_b$ nicht ohne weiteres ausklammern lassen, um sie dann als Lagrange-Multiplikatoren entsprechender Restriktionen zu interpretieren. Weil sich die Klammerausdrücke in der vorliegenden Form als unhandlich erweisen, werden sie nun wie folgt ersetzt:

$$\begin{aligned} r_b(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{v}_b) - \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v}_b &= \hat{\mathbf{p}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}}_b - \delta(\hat{\mathbf{x}}_b|P_b(\mathbf{v}_b)) - \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v}_b && \text{wegen (1e)} \\ &= \hat{\mathbf{p}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}}_b - \left[\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v}_b - \rho(\mathbf{v}_b|L_b(\hat{\mathbf{x}}_b))\right] && \text{beachte } \delta(\hat{\mathbf{x}}_b|P_b(\mathbf{v}_b)) = -\rho(\mathbf{v}_b|L_b(\hat{\mathbf{x}}_b)) \\ &= \hat{\mathbf{p}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}}_b - c_b(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{x}}_b) && \text{wegen (3)} \end{aligned}$$

Der wesentliche Schritt besteht darin, die ursprüngliche Outputkorrespondenz P_b entsprechend (2) durch die inverse Inputkorrespondenz L_b zu ersetzen. In dem resultierenden Problem stehen jetzt die Gütermengen und nicht mehr die Faktormengen den Schattenpreisen $\mathbf{q}$ gegenüber. Ruys, Weddepohl (1979, Anhang A.2.2) sprechen in diesem Zusammenhang daher von einer *inversen dualen Ökonomie*.

Um nun die Schreibweise zu verkürzen, wird wie zuvor von ein Volkswirtschaft ausgegangen, die aus einem einzigen Mehrproduktunternehmen besteht. Unterschlägt man den Subskript $b =$

1 und hält im Kopf, dass das betrachtete Güterbündel erlösmaximal ist, dann lautet die neue Lagrange-Funktion

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + \mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} - c(\mathbf{q}, \mathbf{x}).$$

Nun zieht man die beiden Probleme

(6b) $$\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv c^{*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{x}} \left\{\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} - c(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}\right\}$$

(14) $$\rho(\mathbf{v}|L(\mathbf{x})) \equiv c_{*}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{q}} \left\{\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} - c(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{m}\right\}$$

heran und betrachtet die Programme

(15) $$\sup_{\mathbf{x}} \left\{\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + c_{*}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}\right\} \quad \text{und} \quad \inf_{\mathbf{q}} \left\{\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} + c^{*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{m}\right\}.$$

Das erste Problem stimmt wegen $c_{*}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \rho(\mathbf{v}|L(\mathbf{x})) = -\delta(\mathbf{x}|P(\mathbf{v}))$ mit der Erlösmaximierung (P1) überein. Dagegen wird im zweiten Problem wie in (P3') *der Erlös über die Faktorpreise minimiert.* Auch hier ist das duale Problem kein Problem der Kostenminimierung, was nicht verwundern kann, denn die Kostenfunktion ist in der Lagrange-Funktion bereits enthalten. Nun lässt sich das Theorem 2.3.1 in Walk (1989) auf die beiden voranstehenden Probleme anwenden:

Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent.

1. *Es existiert ein Paar* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}})$*, so dass für alle* $(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{m}$ *folgende Sattelpunktbedingung erfüllt ist:*

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{q}}) \leqq \widetilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}}) \leqq \widetilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q})$$

2. *Es gilt*

$$\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} + c_{*}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{x}}) = \widetilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{q}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} + c^{*}(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{p}).$$

Außerdem sind beide Probleme realisierbar und

$$r(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \max_{\mathbf{x}} \left\{\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + c_{*}(\mathbf{v}, \mathbf{x})\right\} = \min_{\mathbf{q}} \left\{\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} + c^{*}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\right\}$$

3. *Es existiert ein Paar* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}})$*, so dass*

$$\begin{aligned} c(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} - c^{*}(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} - \pi(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{p}), \\ c(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{x}}) &= \hat{\mathbf{q}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} - c_{*}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{q}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} - \rho(\mathbf{v}|L(\hat{\mathbf{x}})). \end{aligned}$$

Die gleichen Aussagen gelten auch für den allgemeinen Fall mit ν Unternehmen, wobei nun die Lagrange-Funktion

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} + \sum_{b} \left(\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_b - c_b(\mathbf{q}, \mathbf{x}_b)\right) \tag{16}$$

zu untersuchen ist. Man beachte, dass die Suche nach einer optimalen Faktorallokation $\hat{\mathfrak{v}} = (\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_\nu)$ im Problem (P3) nun abgelöst wird von der Suche nach einer optimalen Güterallokation $\hat{\mathfrak{x}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_\nu)$. Die nachstehenden Kuhn-Tucker Bedingungen stellen die Existenz eines Sattelpunktes $(\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathbf{q}})$ mit den zuvor beschriebenen Eigenschaften sicher.

$$\text{(17a)} \qquad \nabla_{\mathbf{x}_b}\widetilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{p} - \nabla_{\mathbf{x}_b} c_b(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{x}}_b) \leqq \mathbf{0} \qquad \hat{\mathbf{x}}_b \geqq \mathbf{0} \qquad \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}}_b = \nabla_{\mathbf{x}_b} c_b(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{x}}_b)^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}}_b \qquad b = 1, \ldots, \nu$$

$$\text{(17b)} \qquad \nabla_{\mathbf{q}}\widetilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{v} - \textstyle\sum_b \nabla_{\mathbf{q}} c_b(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{x}}_b) \geqq \mathbf{0} \qquad \hat{\mathbf{q}} \geqq \mathbf{0} \qquad \hat{\mathbf{q}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \textstyle\sum_b \hat{\mathbf{q}}^{\mathsf{T}} \nabla_{\mathbf{q}} c_b(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{x}}_b)$$

Unter Berücksichtigung von Shephards Lemma liefert (17b) die gleichen Bedingungen wie (13b). Dagegen unterscheiden sich die Bedingungen (13a) deutlich von (17a). Selbst für eine innere Lösung mit $\hat{\mathbf{v}}_b > \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{x}}_b > \mathbf{0}$ ist festzuhalten, dass die Bedingungen

$$\hat{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{v}_b} r_b(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{v}}_b) \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{p}} = \nabla_{\mathbf{x}_b} c_b(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{x}}_b)$$

keineswegs *dual* zueinander sind.

6.3 Linear-homogene Produktionstechnologien

Woher kommt die Vorstellung, dass das Infimumproblem in (15) ein Problem der Kostenminimierung ist, das den Restriktionen nichtpositiver Stückgewinne unterliegt? Immerhin wird diese Idee in der gängigen Literatur zur Außendhandelstheorie verfolgt (vgl. hierzu etwa Woodland (1982) oder Dixit, Norman (1980)) und auch die lineare Programmierung legt diese Vermutung nahe.

Wiederum ist ein Blick auf die Lagrange-Funktion (16) hilfreich, die nun vollkommen neu interpretiert wird. Zunächst erhebt man $\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ zur Zielfunktion, die über $\mathbf{q}$ minimiert wird. Wenn es nun möglich ist die nichtnegativen Gütervektoren $\mathbf{v}_b$ aus den Klammerausdrücken unter der Summe auszuklammern, dann lassen sie sich als Lagrange-Multiplikatoren interpretieren und zwar zu den Nebenbedingungen, die in (17a) zu finden sind. Dieses Ziel lässt sich realisieren, indem man linear-homogene Produktionstechnologien $[\lambda P_b(\mathbf{v}_b) = P_b(\lambda \mathbf{v}_b)$ für alle $\lambda > 0]$ einführt. Nun sind auch die Erlösfunktionen r_b linear-homogen in $\mathbf{v}_b$, während die Kostenfunktionen c_b

linear-homogen in $\mathbf{x}_b$ sind. Unter Beachtung des Euler-Theorems

$$r_b(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_b) = \nabla_{\mathbf{v}_b} r_b(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_b)^\mathsf{T} \hat{\mathbf{v}}_b \quad \text{bzw.} \quad c_b(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{x}}_b) = \nabla_{\mathbf{x}_b} c_b(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{x}}_b)^\mathsf{T} \hat{\mathbf{x}}_b$$

folgt aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen (13a) beziehungsweise (17a), dass sich keine positiven Gewinne realisieren lassen. Jede optimale Lösung verlangt demnach, dass die Erlöse mit den Kosten übereinstimmen.

$$\begin{aligned} r_b(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_b) &= \nabla_{\mathbf{v}_b} r_b(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}}_b)^\mathsf{T} \hat{\mathbf{v}}_b = \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T} \hat{\mathbf{v}}_b \quad \text{wegen (13a)} \\ c_b(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{x}}_b) &= \nabla_{\mathbf{x}_b} c_b(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{x}}_b)^\mathsf{T} \hat{\mathbf{x}}_b = \hat{\mathbf{p}}^\mathsf{T} \hat{\mathbf{x}}_b \quad \text{wegen (17a)} \end{aligned}$$

Schließlich stimmen die Grenzkosten mit den Stückkosten überein, so dass die Ungleichungen in (17a) nichtpositive Stückgewinne verlangen, $\partial c_b(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{x}}_b)/\partial x_{jb} = c_b(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{x}}_b)/x_{jb} \geqq p_j$ für alle j und alle b.

6.4 Einproduktunternehmen

Die zweite vereinfachende Annahme besagt, dass jedes Gut durch genau ein Unternehmen mit der Produktionsfunktion $x_j = x_j(\mathbf{v}_j)$ hergestellt wird. Damit geht der Index $b = 1, \ldots, \nu$ über in $j = 1, \ldots, n$ und die neue Lagrange-Funktion ergibt sich als

$$\tilde{\tilde{\mathcal{L}}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^\mathsf{T} \mathbf{v} + \sum_j \big(p_j x_j - c_j(\mathbf{q}, x_j)\big).$$

Die zuvor angegebenen Kuhn-Tucker-Bedingungen verlangen nun für jedes Unternehmen j, das die positive Menge $\hat{x}_j$ herstellt,

$$p_j = \frac{\partial c_j(\hat{\mathbf{q}}, \hat{x}_j)}{\partial x_j}.$$

Wegen der linear-homogenen Produktionsfunktionen lassen sich die Kostenfunktionen multiplikativ separieren,

$$c_j(\mathbf{q}, x_j) = \tilde{c}_j(\mathbf{q})\, x_j,$$

wobei $\tilde{c}_j(\mathbf{q})$ die Stückkostenfunktion des Unternehmens j angibt.

Damit geht die Lagrange-Funktion (16) über in die Form, wie sie Woodland (1982, S. 53) verwendet,

$$\tilde{\tilde{\mathcal{L}}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^\mathsf{T} \mathbf{v} + \sum_j x_j \big(p_j - \tilde{c}_j(\mathbf{q})\big),$$

während die ursprüngliche Lagrange-Funktion aus (12) die Form

$$\mathcal{L}(\mathfrak{v}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} + \sum_j \big(p_j f_j(\mathbf{v}_j) - \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v}_j\big) = \sum_j p_j f_j(\mathbf{v}_j) + \mathbf{q}^\mathsf{T}\big(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \cdots - \mathbf{v}_n\big)$$

annimmt. Selbstverständlich stimmen die Funktionswerte im Optimum überein, $\widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(\hat{\mathfrak{v}}, \hat{\mathbf{q}})$, weil die Gewinne in beiden Fällen identisch sind. Man beachte jedoch, dass die zugrunde liegenden Probleme der Erlösmaximierung und der Kostenminimierung *nicht dual* zueinander sind, wie es Woodland (1982, S. 50) behauptet. Zwar stimmen die Werte der Zielfunktionen im Optimum überein, $\sum_j p_j f_j(\hat{\mathbf{v}}_j) = \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{v}}$, dieses Resultat basiert jedoch auf den linear-homogenen Produktionsfunktionen und ist kein unmittelbares Ergebnis der Dualitätstheorie.

6.5 Lineare Produktionstechnologien

Die bisherigen Beobachtungen sind zu relativieren, wenn in einem dritten Schritt lineare Produktionstechnologien unterstellt werden. Fasst man die Inputkoeffizienten in der Matrix $\mathbf{A}$ zusammen, so lautet das lineare Problem der Erlösmaximierung und sein duales Programm

(P4) $$r(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \max_{\mathbf{x}} \big\{\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{v},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\big\}$$

(D4) $$k(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \min_{\mathbf{q}} \big\{\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{q} \mid \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{q} \geqq \mathbf{p},\ \mathbf{q} \geqq \mathbf{0}\big\}$$

Hierin wird die Menge möglicher Produktionspunkte $P(\mathbf{v})$ durch die Ungleichungen $\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{v}$ und $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ beschrieben. Entsprechend (16) lautet die Lagrange-Funktion hier

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{v} - \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Für ein optimales Paar $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}})$ stellt sich immer das Ergebnis $\mathbf{p}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{q}}^\mathsf{T}\mathbf{v}$ ein, womit die sämtliche Gewinne verschwinden. Daher wird das duale Programm als Problem der Kostenminimierung interpretiert, wobei über die (Schatten-)Preise $\mathbf{q}$ der Produktionsfaktoren und nicht über $\mathbf{v}$ selbst minimiert wird; vgl. hierzu Woodland (1982, S. 62). Gleichzeitig verlangen die dualen Restriktionen, dass die Stückkosten bei keinem Gut dessen Preis unterschreiten dürfen. Da die Produktion eines Gutes bei Verlusten eingestellt wird, resultiert in jeder zulässigen Lösung automatisch eine gewinnlose Situation, so wie es die linear-homogenen Produktionsfunktionen vermuten lassen. Als Fazit ist festzuhalten, dass sich die Beobachtung über die dualen Stückkostenrestriktionen in der linearen Programmierung *nicht* ohne weiteres auf die konvexe Programmierung übertragen lässt.

7 Fazit

Seit von Neumann 1947 die dualen Programme (P4) und (D4) eingeführt hat und spätestens seit Dantzig (1963) eine Vielzahl weiterer Anwendungen vorgestellt hat, sind weite Bereiche der ökonomischen Theorie geprägt von den Erkenntnissen der linearen Programmierung. Diese Beobachtung wird flankiert von der Entwicklung leistungsstarker Algorithmen, mit deren Hilfe sich selbst große lineare Programme auf dem Computer lösen lassen. Hinzu kommt, dass man lineare Programme relativ einfach analysieren kann und schnell zu aussagekräftigen Ergebnissen gelangt. Damit liegt es nahe, die gewonnenen Resultate auf die entsprechenden konvexen Programme zu übertragen. Dieser Schritt wird in der Außenhandelstheorie weitreichend – wenn auch in einigen Details zu sorglos – vollzogen. Der vorliegende Beitrag stellt wesentliche Ergebnisse der konvexen Analysis für die Außenhandelstheorie zusammen und macht auf einige Fehlvorstellungen im Vergleich zur linearen Programmierung aufmerksam.

Literaturverzeichnis

AUBIN, J. P.: *Mathematical Methods of Game and Economic Theory.* Amsterdam : North-Holland, 1979.

BOBZIN, H.: *Indivisibilities: Microeconomic Theory with Respect to Indivisible Goods and Factors.* Heidelberg : Physica, 1998.

DANTZIG, G. B.: *Linear Programming and Extensions.* Princeton : Princeton University, 1963.

DIXIT, A. ; NORMAN, V.: *Theory of International Trade.* Cambridge : Cambridge University, 1980.

VON NEUMANN, J.: *On a Maximization Problem, Manuscript.* Princeton : Institute for Advanced Studies, 1947.

NEWMAN, P.: Duality. In: EATWELL, J. ; MILGATE, M. ; NEWMAN, P. (Hrsg.): *The New Palgrave, A Dictionary of Economics,* S. 924–934. London : Macmillan, 1987.

ROCKAFELLAR, R. T.: *Convex Analysis.* Princeton : Princeton University, 1972.

RUYS, P. H. M. ; WEDDEPOHL, H. N.: Economic Theory and Duality. In: KRIENS, J. (Hrsg.): *Convex Analysis and Mathematical Economics, Proceedings, Tilburg 1978,* S. 1–72. Berlin : Springer, 1979.

WALK, M.: *Theory of Duality in Mathematical Programming.* Wien : Springer, 1989.

WOODLAND, A. D.: *International Trade and Resource Allocation.* Amsterdam : North-Holland, 1982.

Seit 1989 erschienene Diskussionsbeiträge / Discussion papers released since 1989

1-89 **Klaus Schöler**, Zollwirkungen in einem räumlichen Oligopol

2-89 **Rüdiger Pethig**, Trinkwasser und Gewässergüte. Ein Plädoyer für das Nutzerprinzip in der Wasserwirtschaft

3-89 **Rüdiger Pethig**, Calculus of Consent: A Game-theoretic Perspective. Comment

4-89 **Rüdiger Pethig**, Problems of Irreversibility in the Control of Persistent Pollutants

5-90 **Klaus Schöler**, On Credit Supply of PLS-Banks

6-90 **Rüdiger Pethig**, Optimal Pollution Control, Irreversibilities, and the Value of Future Information

7-90 **Klaus Schöler**, A Note on "Price Variation in Spatial Markets: The Case of Perfectly Inelastic Demand"

8-90 **Jürgen Eichberger** and **Rüdiger Pethig**, Constitutional Choice of Rules

9-90 **Axel A. Weber**, European Economic and Monetary Union and Asymmetries and Adjustment Problems in the European Monetary System: Some Empirical Evidence

10-90 **Axel A. Weber**, The Credibility of Monetary Target Announcement: An Empirical Evaluation

11-90 **Axel A. Weber**, Credibility, Reputation and the Conduct of Economic Policies Within the European Monetary System

12-90 **Rüdiger Ostermann**, Deviations from an Unidimensional Scale in the Unfolding Model

13-90 **Reiner Wolff**, Efficient Stationary Capital Accumulation Structures of a Biconvex Production Technology

14-90 **Gerhard Brinkmann**, Finanzierung und Lenkung des Hochschulsystems - Ein Vergleich zwischen Kanada und Deutschland

15-90 **Werner Güth** and **Rüdiger Pethig**, Illegal Pollution and Monitoring of Unknown Quality – A Signaling Game Approach

16-90 **Klaus Schöler**, Konsistente konjekturale Reaktionen in einem zweidimensionalen räumlichen Wettbewerbsmarkt

17-90 **Rüdiger Pethig**, International Environmental Policy and Enforcement Deficits

18-91 **Rüdiger Pethig** and **Klaus Fiedler**, Efficient Pricing of Drinking Water

19-91 **Klaus Schöler**, Konsistente konjekturale Reaktionen und Marktstrukturen in einem räumlichen Oligopol

20-91 **Axel A. Weber**, Stochastic Process Switching and Intervention in Exchange Rate Target Zones: Empirical Evidence from the EMS

21-91 **Axel A. Weber**, The Role of Policymakers' Reputation in the EMS Disinflations: An Empirical Evaluation

22-91 **Klaus Schöler**, Business Climate as a Leading Indicator? An Empirical Investigation for West Germany from 1978 to 1990

23-91 **Jürgen Ehlgen, Matthias Schlemper, Klaus Schöler**, Die Identifikation branchenspezifischer Konjunkturindikatoren

24-91 **Reiner Wolff**, On the Existence of Structural Saddle-Points in Variational Closed Models of Capital Formation

25-91 **Axel A. Weber**, Time-Varying Devaluation Risk, Interest Rate Differentials and Exchange Rates in Target Zones: Empirical Evidence from the EMS

26-91 **Walter Buhr** and **Reiner Wolff**, Partial versus Global Optimizations in Economic Dynamics: The Case of Recursive Programming

27-91 **Klaus Schöler**, Preisvariationen und beschränkte Informationen in einem räumlichen Oligopol

28-92 **Jürgen Ehlgen**, Lösen des stochastischen Wachstumsmodells durch Parameterisieren der Entscheidungsfunktion

29-92 **Alfred W. Marusev** und **Andreas Pfingsten**, Zur arbitragefreien Fortrechnung von Zinsstruktur-Kurven

30-92 **Jürgen Ehlgen, Matthias Schlemper, Klaus Schöler**, Die Anwendung branchenspezifischer Konjunkturindikatoren

31-92 **Klaus Schöler**, Zum strategischen Einsatz räumlicher Preistechniken

32-92 **Günter Knieps** and **Rüdiger Pethig**, Uncertainty, Capacity Costs and Competition in the Electric Power Industry

33-92 **Walter Buhr**, Regional Economic Growth by Policy-Induced Capital Flows: I. Theoretical Approach

34-92 **Walter Buhr**, Regional Economic Growth by Policy-Induced Capital Flows: II. Policy Simulation Results

35-92 **Andreas Pfingsten** and **Reiner Wolff**, Endowment Changes in Economic Equilibrium: The Dutch Disease Revisited

36-92 **Klaus Schöler**, Preiselastische Nachfrage und strategische Preisreaktionen in einem räumlichen Wettbewerbsmarkt

37-92 **Rüdiger Pethig**, Ecological Dynamics and the Valuation of Environmental Change

38-93 **Reiner Wolff**, Saddle-Point Dynamics in Non-Autonomous Models of Multi-Sector Growth with Variable Returns to Scale

39-93 **Reiner Wolff**, Strategien der Investitionspolitik in einer Region: Der Fall des Wachstums mit konstanter Sektorstruktur

40-93 **Axel A. Weber**, Monetary Policy in Europe: Towards a European Central Bank and One European Currency

41-93 **Axel A. Weber**, Exchange Rates, Target Zones and International Trade: The Importance of the Policy Making Framework

42-93 **Klaus Schöler** und **Matthias Schlemper**, Oligopolistisches Marktverhalten der Banken

43-93 **Andreas Pfingsten** and **Reiner Wolff**, Specific Input in Competitive Equilibria with Decreasing Returns to Scale

44-93 **Andreas Pfingsten** and **Reiner Wolff**, Adverse Rybczynski Effects Generated from Scale Diseconomies

45-93 **Rüdiger Pethig**, TV-Monopoly, Advertising and Program Quality

46-93 **Axel A. Weber**, Testing Long-Run Neutrality: Empirical Evidence for G7-Countries with Special Emphasis on Germany

47-94 **Rüdiger Pethig**, Efficient Management of Water Quality

48-94 **Klaus Fiedler**, Naturwissenschaftliche Grundlagen natürlicher Selbstreinigungsprozesse in Wasserressourcen

49-94 **Rüdiger Pethig**, Noncooperative National Environmental Policies and International Capital Mobility

50-94 **Klaus Fiedler**, The Conditions for Ecological Sustainable Development in the Context of a Double-Limited Selfpurification Model of an Aggregate Water Recourse

51-95 **Gerhard Brinkmann**, Die Verwendung des Euler-Theorems zum Beweis des Adding-up-Theorems impliziert einen Widerspruch

52-95 **Gerhard Brinkmann**, Über öffentliche Güter und über Güter, um deren Gebrauch man nicht rivalisieren kann

53-95 **Marlies Klemisch-Ahlert**, International Environmental Negotiations with Compensation or Redistribution

54-95 **Walter Buhr** and **Josef Wagner**, Line Integrals In Applied Welfare Economics: A Summary Of Basic Theorems

55-95 **Rüdiger Pethig**, Information als Wirtschaftsgut

56-95 **Marlies Klemisch-Ahlert**, An Experimental Study on Bargaining Behavior in Economic and Ethical Environments

57-96 **Rüdiger Pethig**, Ecological Tax Reform and Efficiency of Taxation: A Public Good Perspective

58-96 **Daniel Weinbrenner**, Zur Realisierung einer doppelten Dividende einer ökologischen Steuerreform

59-96 **Andreas Wagener**, Corporate Finance, Capital Market Equilibrium, and International Tax Competition with Capital Income Taxes

60-97 **Daniel Weinbrenner**, A Comment on the Impact of the Initial Tax Mix on the Dividends of an Environmental Tax Reform

61-97 **Rüdiger Pethig**, Emission Tax Revenues in a Growing Economy

62-97 **Andreas Wagener**, Pay-as-you-go Pension Systems as Incomplete Social Contracts

63-97 **Andreas Wagener**, Strategic Business Taxation when Finance and Portfolio Decisions are Endogenous

64-97 **Thomas Steger**, Productive Consumption and Growth in Developing Countries

65-98 **Marco Runkel**, Alternative Allokationsmechanismen für ein Rundfunkprogramm bei endogener Programmqualität

66-98 **Jürgen Ehlgen**, A Comparison of Solution Methods for Real Business Cycle Models

67-98 **Peter Seethaler**, Zum Einfluß von Devisentermingeschäften auf das Marktgleichgewicht bei asymmetrischer Information

68-98 **Thomas Christiaans**, A Note on Public Goods: Non-Excludability Implies Joint Consumability

69-98 **Michael Gail**, Stylized Facts and International Business Cycles – The German Case

70-98 **Thomas Eichner**, The state as social insurer: labour supply and investments in human capital

71-98 **Thomas Steger**, Aggregate Economic Growth with Subsistence Consumption

72-98 **Andreas Wagener**, Implementing Equal Living Conditions in a Federation

73-99 **Thomas Eichner** and **Rüdiger Pethig**, Product Design and Markets for Recycling, Waste Treatment and Disposal

74-99 **Peter Seethaler**, Zum Einfluß des Hedging auf das Kreditvergabeverhalten der Banken

75-99 **Thomas Christiaans**, Regional Competition for the Location of New Facilities

76-99 **Thomas Eichner** and **Rüdiger Pethig**, Product Design and Efficient Management of Recycling and Waste Treatment

77-99 **Rüdiger Pethig**, On the Future of Environmental Economics

78-99 **Marco Runkel**, Product Durability, Solid Waste Management, and Market Structure

79-99 **Hagen Bobzin**, Dualities in the Functional Representation of a Production Technology

80-99 **Hagen Bobzin**, Behandlung von Totzeitsystemen in der Ökonomik

81-99 **Marco Runkel**, First-Best and Second-Best Regulation of Solid Waste under Imperfect Competition in a Durable Good Industry

82-99 **Marco Runkel**, A Note on 'Emissions Taxation in Durable Goods Oligopoly'

83-99 **Thomas Eichner** and **Rüdiger Pethig**, Recycling, Producer Responsibility and Centralized Waste Management

84-00 **Thomas Eichner** und **Rüdiger Pethig**, Das Gebührenkonzept der Duales System Deutschland AG (DSD) auf dem ökono-mischen Prüfstand

85-00 **Thomas Eichner** und **Rüdiger Pethig**, Gebührenstrategien in einem disaggregierten Modell der Abfallwirtschaft

86-00 **Rüdiger Pethig** and **Sao-Wen Cheng**, Cultural Goods Consumption and Cultural Capital

87-00 **Michael Gail**, Optimal Monetary Policy in an Optimizing Stochastic Dynamic Model with Sticky Prices

88-00 **Thomas Eichner** and **Marco Runkel**, Efficient and Sustainable Management of Product Durability and Recyclability

89-00 **Walter Buhr** and **Thomas Christiaans**, Economic Decisions by Approved Principles: Rules of Thumb as Behavioral Guidelines

90-00 **Walter Buhr**, A Macroeconomic Growth Model of Competing Regions

91-00 **Hagen Bobzin**, Computer Simulation of Reallocating Resources among Growing Regions

92-00 **Sao-Wen Cheng** and **Andreas Wagener**, Altruism and Donations

93-01 **Jürgen Ehlgen**, Geldpolitische Strategien. Die Deutsche Bundesbank und die Europäische Zentralbank im Vergleich

94-01 **Thomas Christiaans**, Economic Growth, the Mathematical Pendulum, and a Golden Rule of Thumb

95-01 **Thomas Christiaans**, Economic Growth, a Golden Rule of Thumb, and Learning by Doing

96-01 **Michael Gail**, Persistency and Money Demand Distortions in a Stochastic DGE Model with Sticky Prices

97-01 **Rüdiger Pethig**, Agriculture, pesticides and the ecosystem

98-01 **Hagen Bobzin**, Das duale Programm der Erlösmaximierung in der Außenhandelstheorie