

Bachelorarbeit
im Studiengang
Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau

**Ein mathematisches Optimierungsmodell zur
statischen Anordnung von Fachwerkträgern**

Autor: Christian Reintjes
Friedrichstraße 77
57072 Siegen
Matrikelnummer:915001

Betreuung: Prof. Dr. Ulf Lorenz
M.Sc. Michael Hartisch

Ort, Abgabetermin: Siegen, im April 2016

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Ulf Lorenz für den interessanten Themenvorschlag, sowie die Betreuung und Begutachtung der Bachelorarbeit bedanken. Weiterhin bei Michael Hartisch, der mir bei der Einarbeitung in die Thematik und fachlichen Fragen stets zur Seite stand.

Außerdem danke ich meinen Korrekturlesern samt meinen Kommilitonen und Freunden.



Abstract

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Verwendung eines linearen Optimierungsmodells zur Erzeugung einer Fachwerkstruktur, welche strukturelles Gleichgewicht aufweist. Hierbei sollen die Fachwerkträger kostenminimal angeordnet werden. Generell wird versucht, die Methoden der mathematischen Optimierung im Kontext des Fachwerkbaus anzuwenden.

Im Vergleich zu aktuellen Problemen der Dimensionierung, wird keine vorgegebene Stabanordnung hinsichtlich des Volumens minimiert, sondern eben diese optimale Anordnung ermittelt. Die Kinematik wird hierzu explizit nicht benötigt, sodass tendenziell größere Bauräume betrachtet werden können. Das Modell wird genutzt, um die Stabilität der erzeugten Strukturen sicherzustellen und eine optimale Anordnung unter Einwirkung der vorliegenden Lasten zu erzeugen. Das grundlegende Konzept ist auf zwei- und dreidimensionale Strukturen anwendbar. Innerhalb dieser Arbeit werden vorerst nur zweidimensionale Strukturen erzeugt.

Zuletzt werden zwei Probleminstanzen, sowie deren Lösungen als Flussnetzwerk, dargestellt. Die Instanzen sind bewusst unterschiedlich gewählt, um sie mit markanten Ausfachungsarten zu vergleichen. Es wurden charakteristische Ähnlichkeiten entdeckt.



Inhaltsverzeichnis

Danksagung.....	I
Abstract	III
Inhaltsverzeichnis.....	V
Abbildungsverzeichnis	VII
Tabellenverzeichnis.....	VIII
Abkürzungsverzeichnis	IX
1 Einleitung.....	1
2 Grundlagen des OR.....	4
2.1 OR als Schnittstellenmodell	4
2.2 Modelllösung in der Praxis.....	5
3 Mathematische Optimierung.....	8
3.1 Mathematische Programmierung.....	8
3.2 Optimierungsprobleme	9
3.3 Allgemeines Optimierungsmodell.....	10
3.4 Lineare Optimierung	11
3.4.1 Entscheidungsvariablen	12
3.4.2 Zielfunktion.....	13
3.4.3 Restriktionen.....	13
3.4.4 Formen und Eigenschaften von LPs	14
3.5 Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung	16
3.6 Graphentheorie	17
3.6.1 Grundlagen.....	17
3.6.2 Quelle-Senke-Netzwerke	18
3.6.3 Ein q-s Fluss.....	19
4 Statik von Fachwerkträgern	22
4.1 Definition eines Fachwerkträgers.....	22
4.2 Berechnungsgrundlagen	24
4.2.1 Statische Bestimmtheit.....	24
4.2.2 Nullstäbe	26
4.2.3 Bildungsgesetze	27
1. Bildungsgesetz	27
2. Bildungsgesetz	28
3. Bildungsgesetz	29
4.3 Stabkräfte.....	29

4.3.1 Lineares Gleichungssystem	30
5 Mathematisches Modell	33
5.1 Modellübersicht	33
5.2 Interpretation der Statik	34
5.3 Bauraum als Flussproblem	39
5.4 Erweiterung Nullstäbe	48
6 Auswertung	52
6.1 Instanz 1 : Hebezeug	53
6.2 Instanz 2 : Eisenbahnbrücke	55
7 Fazit	57
Literaturverzeichnis	59
Anlage A: Ausfachungsarten	61
Anlage B: Modellübersicht	67
Anlage C : Flussnetzwerk	74
Eidesstattliche Erklärung	81

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Eisenbahnbrücke Griethausen.....	3
Abbildung 2: OR Modell.....	4
Abbildung 3: Vorgang der Modellösung in der Praxis	6
Abbildung 4: Lineares Optimierungsproblem.....	11
Abbildung 5: Übersicht Themengebiete.....	12
Abbildung 6: gerichteter sowie ungerichteter Graph	18
Abbildung 7: Erweiterung eines Netzwerkes um einen zulässigen Fluss	20
Abbildung 8: Fachwerksreihe	23
Abbildung 9: Nullstäbe anhand Tragwerksreihe.....	27
Abbildung 10: Bildungssatz, Teil 1.....	27
Abbildung 11: 1. Bildungssatz, Teil 2.....	28
Abbildung 12: 2. Bildungssatz, Teil 1.....	28
Abbildung 13: 2 Bildungssatz, Teil 2.....	28
Abbildung 14: 3 Bildungssatz, Teil 1.....	29
Abbildung 15: 3 Bildungssatz, Teil 2.....	29
Abbildung 16: ebenes Fachwerk.....	30
Abbildung 17: Einteilung Bauraum	39
Abbildung 18: Sonderfall 1	40
Abbildung 19: Sonderfall 2	40
Abbildung 20: Sonderfall 3	41
Abbildung 21: Sonderfall 4	41
Abbildung 22: Sonderfall 5	42
Abbildung 23: Sonderfall 6.....	42
Abbildung 24: Sonderfall 7.....	42
Abbildung 25: Sonderfall 8.....	43
Abbildung 26: Sonderfall 9, allgemeiner Knoten	43
Abbildung 27: Vorzeichenkonvektion	45
Abbildung 28: Innere Kopplung	49
Abbildung 29: Fallunterscheidung Nullstäbe.....	50
Abbildung 30: Viaduc du Viaur.....	56

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Kräftevektor / LGS.....	32
Tabelle 2: Verknüpfung der Zustandsgrößen.....	36

Abkürzungsverzeichnis

OR	Operations Research
LP	Linear programming – Lineare Optimierung
NNB	Nichtnegativitätsbedingung
IP	Integer programming
MIP	Mixed integer programming
GGB	Gleichgewichtsbedingungen
q-s	Quelle-Senke

1 Einleitung

Das Bestmögliche zu erreichen oder zumindest in eine hinreichende Nähe zu gelangen, ist eine natürliche Forderung des Menschen (Burkard & Zimmermann, 2012, S. 5). Infolgedessen stellt sich die Frage, was die optimale Lösung eines Problems ist und inwiefern diese Frage überhaupt in Hinsicht auf die Zielsetzung beantwortet werden kann. Werden komplexe Probleme unter mehreren Beteiligten diskutiert, kommt es in der Regel zu unklaren Zielsetzungen und verschwommenen Annahmen (Burkard & Zimmermann, 2012, S. 5). Diese gilt es in jeder Beziehung zu vermeiden, gerade wenn verschiedene Bereiche wie die lineare Optimierung und das Ingenieurwesen aufeinandertreffen. Das Fortschreiten der mathematischen Optimierung, von Digitalrechnern sowie dem Ingenieurwesen, ermöglicht es komplexe Konstruktionen nicht nur auf Erfahrungswerten basierend zu entwickeln, sondern die neusten Erkenntnisse aus Wissenschaft und Forschung zu verwenden um ebensolche Probleme optimal zu lösen. Um diesen Fortschritt aufrecht zu halten, ist es nötig neue theoretische Modelle zu formulieren und hinsichtlich ihres Nutzen zu untersuchen.

1.1 Zielsetzung

Ziel dieser Bachelor-Thesis ist es, ein lineares Optimierungsmodell zur statischen und ressourcen-minimierenden Anordnung von Fachwerkträgern zu formulieren. Es findet somit eine mathematische Beschreibung einer ingenieurwissenschaftlichen Aufgabenstellung statt. Das wesentliche Ziel liegt in der automatischen Generierung einer optimalen Struktur.

Alle Stäbe, angreifenden Kräfte und Stützkräfte liegen in einer Ebene. Das Tragwerk besteht dabei aus einzelnen Stäben, die in Knotenpunkten miteinander verbunden sind. Angestrebt wird eine Übertragung der Lasten, wobei diese sich in Zug und Druckkräften in den Stäben bemerkbar machen. Die Baustatik wird strikt eingehalten, eine Bewegung der Bauteile im Raum ist somit nicht zulässig, siehe hierzu Abb. 1. Es liegt ein strukturelles Gleichgewicht vor. Es wird ein Ansatz formuliert, der auf die Verwendung der Kinematik verzichtet. Hierdurch können tendenziell größere Bauräume, aufgrund des geringeren Rechenaufwands, betrachtet werden. Gerade in großen Bauräumen liegt noch immer ein deutlicher Optimierungsbedarf in Bezug auf die Vermeidung von Nullstäben vor.

Im Vergleich zu aktuellen Problemen der Dimensionierung, wird keine vorgegebene Stabanordnung hinsichtlich des Volumens minimiert, sondern eben diese optimale Anordnung ermittelt. Der in dieser Arbeit dargestellte Ansatz soll dazu dienen, in zukünftigen Arbeit genutzt zu

werden, um Fachwerkstrukturen näher zu untersuchen. Prinzipiell ist er jedoch auf beliebige Strukturen anwendbar.

1.2 Gliederung der Arbeit

In dieser Bachelorthesis sollen die Methoden der mathematischen Optimierung auf die Fragestellungen des Fachwerkbaus angewandt werden. Dabei sind möglichst genaue Zielsetzungen sowie Restriktionen zu berücksichtigen. Dazu wird in Kapitel 2 der Bereich Operations Research (im Folgenden OR) als Schnittstellenmodell vorgestellt.

In den zwei nachfolgenden Kapiteln werden die Grundlagen der mathematischen Optimierung, insbesondere der linearen Optimierung, sowie der Statik von Fachwerkträgern erörtert. In Kapitel 5 wird die mathematische Modellierung zur statischen Anordnung von Fachwerkträgern vorgestellt. Vorweg wird dazu eine Übersicht des Modells gegeben.

Im Anschluss werden zwei Beispielinstanzen, eine statische Lagerung von Hebewerkzeugen und eine Fachwerkbrücke, ausgewertet und ein Resümee getroffen. Analogien zu vorhanden Fachwerkssystemen werden geprüft.

Zuletzt fasst Kapitel 7 die grundlegenden Merkmale dieses Modells zusammen und zeigt mögliche Erweiterungen sowie Verbesserungen auf.



Abbildung 1: Eisenbahnbrücke Griethausen, eigenes Bildmaterial

2 Grundlagen des OR

Dieses Kapitel dient der Darstellung des OR. Zunächst wird der Begriff als solches definiert und seine Besonderheit als Schnittstelle zwischen verschiedenen Fachbereichen dargestellt. Die Anwendungsgebiete, Methoden und Modelle sowie Werkzeuge werden gegenübergestellt und das Vorgehen zur Lösung eines Modells von der Realität bis hin zum letztlichen Entscheidungsvorschlag wird vorgestellt.

2.1 OR als Schnittstellenmodell

Unter dem Begriff des OR werden im Allgemeinen die Entwicklung und der Einsatz quantitativer Modelle und Methoden zur Entscheidungsunterstützung in Unternehmen und Organisationen verstanden (Suhl & Mellouli, 2005, S. 5 f.). Der deutsche sowie der englische OR wurden Mitte des vorigen Jahrhunderts von der Armee geprägt (Zimmermann, 2008, S. 6 f.). Der Bereich ist durch eine Zusammenarbeit von angewandter-Mathematik, Wirtschaftswissenschaften sowie der Informatik geformt (GOR, 2016). Heutzutage werden außerdem technische Problemstellungen, wie z. B. aus dem Ingenieurwesen, formuliert. Wie in Abb. 2 zu sehen ist, ist der Bereich OR als Schnittstelle zu verstehen. Für verschiedene Anwendungsgebiete stehen Werkzeuge sowie Methoden und Modelle zur Verfügung und bilden an der Schnittstelle den demgemäß geprägten Begriff OR.

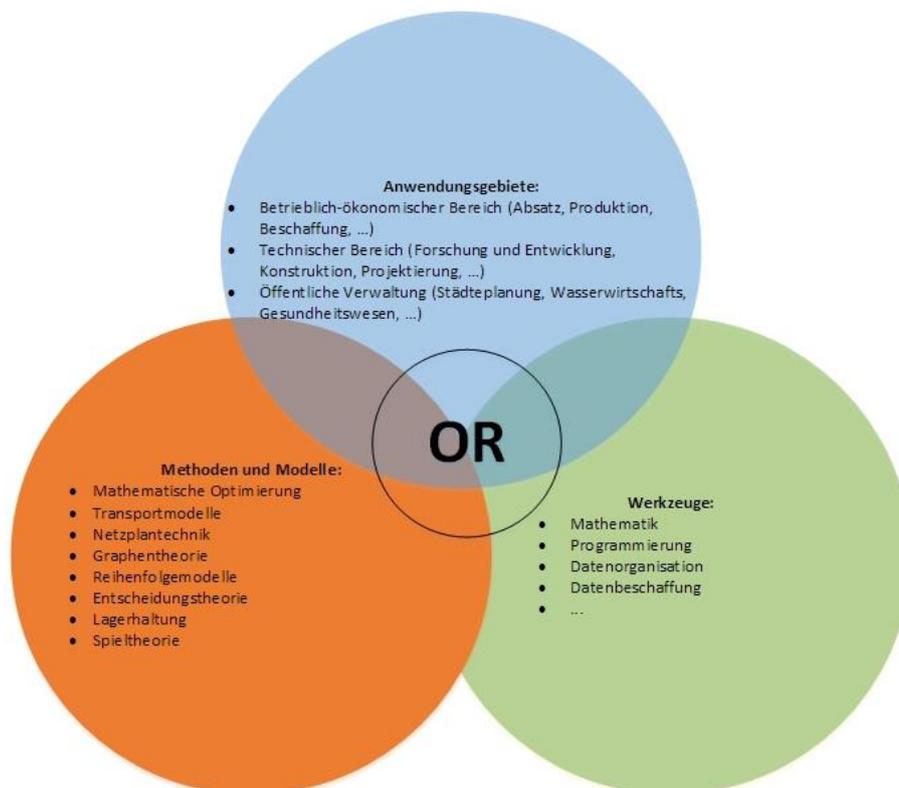


Abbildung 2: OR Modell, in Anlehnung an (Dempe, 2010, S. 6)

Wichtigstes Teilgebiet des OR ist die mathematische Optimierung, insb. die ganzzahlige Optimierung (diskrete Mathematik). Hierbei werden Kenntnisse in den Bereichen Matrizenrechnung, Vektoranalysis, Stochastik sowie Graphentheorie benötigt (Zimmermann, 2008, S. 6 ff.).

Die zur Verfügung stehenden Werkzeuge sind unter anderem die Mathematik, Mathematische Programmierung, Datenorganisation sowie Datenbeschaffung. Wichtig ist hierbei, dass der Begriff „Mathematische Programmierung“ zur Beschreibung der Maximierung oder Minimierung einer Zielfunktion von Entscheidungsvariablen verwendet wird, wobei die Variablen bestimmten Nebenbedingungen unterliegen (Suhl & Mellouli, 2005, S. 20). Dieser Zusammenhang sollte klar von dem Programmieren als Tätigkeit, ein Computerprogramm zu erstellen, unterschieden werden.

Diese grundlegenden Werkzeuge bilden mit verschiedensten Methoden und Modellen ein breites Spektrum an Anwendungsgebieten für das OR. Neben der an erster Stelle durch angewandte-Mathematik, Wirtschaftswissenschaften und Informatik geprägte Zusammenarbeit (GOR, 2016), können auch technische Fragestellungen aus dem Bereich des Ingenieurwesens mittels OR behandelt werden.

Aus heutiger Sicht bekannte Probleme aus dem OR sind das Königsberger Brückenproblem, das Briefträgerproblem (Chinese postman problem), das Problem des Handlungsreisenden, das Rucksackproblem, der Vier-Farben-Satz, Pack- und Zuschnittprobleme, sowie Reihenfolgeprobleme bei der Maschinenbelegung (Domschke, Drexl, Klein, & Scholl, 2015, S. 1 ff.).

Diese können oftmals als Wegeprobleme mit Hilfe von Verfahren aus der Graphentheorie modelliert werden. Auch wenn einige dieser Probleme praktische Anwendungen besitzen, sind beispielsweise Transportprobleme und Umladeprobleme in der Praxis von höherer Bedeutung.

2.2 Modellösung in der Praxis

Der Vorgang der Modellösung teilt sich in der Praxis, wie in Abb. 3 zu sehen, in fünf Niveaus mit jeweiligen Bearbeitungsschritten zwischen diesen auf. Der erste sowie letzte Schritt sind dabei iterativ verbunden. Wird anfänglich ein falscher oder nicht ausreichend großer Realitätsausschnitt betrachtet, wird der letztendlich erarbeitete Entscheidungsvorschlag ein nicht optimales Ergebnis sein. Es ist ein geeigneterer Realitätsausschnitt zu wählen, bzw. der vorherige sinnvoll zu ergänzen. Da das mathematische Modell und das darauf folgende Computermodell nur ein Abbild des vorher gewählten Realitätsausschnittes sind, können innerhalb dieser vorherige Fehler gar nicht oder nur minimal ausgeglichen werden.

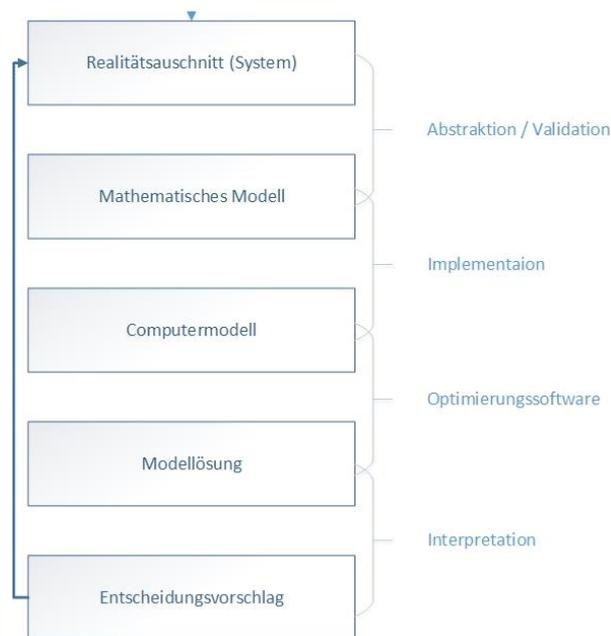


Abbildung 3: Vorgang der Modelllösung in der Praxis, in Anlehnung an (Suhl & Mellouli, 2005, S. 77 ff.)

Laut Suhl können die Methoden des OR nicht direkt auf die Realität angewandt werden, sondern nur auf Modelle der Realität. Ein Ausschnitt aus der Realität bzw. eines Systems innerhalb dieser muss mit Hilfe eines mathematischen Modells beschrieben werden. Dabei findet eine Abstraktion statt. Hierbei ist nicht immer offensichtlich zu erkennen, wie das eigentliche Entscheidungsproblem strukturiert ist und welche Aspekte der Realität modelliert werden sollten. Zunächst muss geklärt werden, was der Entscheidungsträger möchte (**Zielfunktion**), welche Freiheitsgerade (**Entscheidungsvariablen**) man hat und welche Nebenbedingungen (**Restriktionen**) berücksichtigt werden sollten. Dabei ist zu berücksichtigen, dass es zu einem Entscheidungsproblem immer mehrere Modelle geben kann, da es eine Abstraktion der Realität darstellt. (Suhl & Mellouli, 2005, S. 6 f.)

Auf Basis des mathematischen Modells kann nun eine computergerechte Darstellung stattfinden, indem es in Form eines Computermodells implementiert wird. Es muss über standardisierte Datenstrukturen in eine „Optimierungseingabe“ eingegeben werden (Suhl & Mellouli, 2005, S. 77). Das Computermodell wird anschließend mittels entsprechender Optimierungssoftware gelöst und interpretiert, um schlussendlich eine Entscheidung treffen zu können. Hierbei wird die Isomorphie des Modells gegenüber der Realität vorausgesetzt.

Ein Modell ist ein zweckorientiertes, ggf. vereinfachtes Abbild eines Ausschnitts der Realität, welches hinsichtlich der interessierenden Zusammenhänge strukturähnlich oder strukturgleich ist. (Werners, 2013, S. 3)

Hierbei lassen sich laut Werners die Modelle hinsichtlich ihres Zwecks in Beschreibungsmodelle, Erklärungs- oder Prognosemodelle und Entscheidungsmodelle unterscheiden.

Beschreibungsmodelle dienen der Abbildung der realen Situation zur Feststellung bestimmter Sachverhalte, wie etwa die systematische Erfassung der Kosten und Erlöse im betrieblichen Rechnungswesen. Fachwerksmodelle zählen ebenso zu den Beschreibungsmodellen.

Erklärungs- oder Prognosemodelle unterstützen bei der Untersuchung von Konsequenzen geplanter Aktivitäten

Entscheidungsmodelle dienen der Ermittlung von Aktivitäten, die unter Berücksichtigung der Möglichkeiten und äußeren Einflüsse und der Bewertung der Ergebnisse zu möglichst optimalen Entscheidungen führen.

3 Mathematische Optimierung

Innerhalb dieses Kapitels wird der Begriff Mathematische Programmierung eingeführt, ferner Optimierungsprobleme in die Problemstellungen der Entscheidungsprobleme sowie Optimierungsprobleme eingeteilt. Anschließend wird ein allgemeines Optimierungsmodell formuliert und der Fall der linearen Optimierung detailliert abgebildet. Die ganzzahlige und kombinatorische Optimierung wird beschrieben, um mit der linearen Optimierung zusammen als Grundlage für das in Kapitel 5 abgehandelte Modell zu dienen. Weiterführend wird die Graphentheorie definiert, als Grundlage der ebenso erklärten Flussnetzwerke.

Die meisten Definitionen sind aus (Suhl & Mellouli, 2005) , sowie (Domschke, Drexl, Klein, & Scholl, 2015) entnommen.

3.1 Mathematische Programmierung

Der Begriff „Mathematische Programmierung“ wird zur Beschreibung der Maximierung oder Minimierung einer Zielfunktion von Entscheidungsvariablen verwandt, wobei die Variablen bestimmten Nebenbedingungen unterliegen. (Suhl & Mellouli, 2005, S. 20)

Der Begriff „Programmieren“ wird seit ca. 1940 verwendet. Er beschreibt, so Suhl, die Planung von Abläufen und Prozessen in einer Organisation. Hierbei wurde entdeckt, dass sich der Grad der Plan- oder Prozesserfüllung mittels Entscheidungsvariablen darstellen lässt. Ziel ist es, ihren Wert zu bestimmen. Daraufhin wurden Restriktionen eingeführt, die den Planungsaufgaben zugrunde liegen und als Randbedingungen zu verstehen sind. Eine Lösung, die all diese Nebenbedingungen erfüllt, wird als eine geeignete Lösung der Aufgabe angesehen. Durch das Einführen einer Zielfunktion, konnten noch komplexere Probleme gelöst und die Lösung entsprechend interpretiert werden. Anstelle dass nur die Nebenbedingungen erfüllt wurden, sodass eine geeignete Lösung vorlag, konnte die Lösung nun in ihrer Güte verglichen werden. Nun war es nur noch nötig, diejenige Lösung zu finden, welche den Zielfunktionswert maximiert oder minimiert (Suhl & Mellouli, 2005).

3.2 Optimierungsprobleme

Die Bedeutung des Optimums ist es, unter gegebenen Voraussetzungen, im Hinblick auf ein Ziel, das höchst erreichbare Maß bzw. den höchst erreichbaren Wert zu erreichen (Duden, 2016).

Hierbei ist zu beachten, dass es sich in der mathematischen Optimierung um die Suche eines Extremums einer Funktion handelt. Diese Funktion stellt, auf beliebige Weise, etwas Gutes oder Schlechtes dar. Das gesuchte Optimum kann hierbei ein Maximum oder Minimum sein, der Sachverhalt muss kontextgebunden betrachtet werden. Aus dem Sachverhalt heraus, dass sich das Optimum mathematisch formulieren lässt, ist es möglich, einige technische Probleme mit rein mathematischen Methoden auf ihr Optimum hin zu untersuchen.

Hierbei sei Ω ein Lösungsraum (Menge von möglichen Lösungen) sowie eine Zielfunktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Generell werden zwei Problemstellungen unterschieden (Nationalbibliothek, 2016):

Entscheidungsprobleme, bei denen zusätzlich ein Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ gegeben ist und ermittelt werden soll, ob es ein $x \in \Omega$ gibt mit $f(x) \geq g$.

Optimierungsprobleme, bei denen man den Wert der besten Lösung wissen will, also $\max\{f(x) | x \in \Omega\}$.

Ein Optimierungsproblem lässt sich leicht in ein Entscheidungsproblem wandeln, indem man zur Problemstellung den Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ bzw. $g \in \mathbb{N}$ hinzunimmt.

3.3 Allgemeines Optimierungsmodell

Die meisten Definitionen dieses Abschnittes sind aus (Domschke, Drexl, Klein, & Scholl, 2015, S. 4 ff.).

Ein Optimierungsmodell lässt sich allgemein wie folgt formulieren:

Zielfunktion (Maximiere/Minimiere)

$$z = F(\mathbf{x}) \quad (3.3.1)$$

unter den Restriktionen

$$g_i(\mathbf{x}) \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad (3.3.2)$$

$$\mathbf{x} \in W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n, \quad W_j \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_+, \mathcal{B}\}, \text{ für } j = 1, \dots, n \quad (3.3.3)$$

Dabei haben die verwendeten Symbole folgende Bedeutung:

\mathbf{x}	Variablenvektor mit n Komponenten x_1, \dots, x_n
$F, F(\mathbf{x})$	Zielfunktion bzw. Zielfunktionswert für den Variablenvektor \mathbf{x}
$x_j \in \mathbb{R}_+$	Nichtnegativitätsbedingung (nichtnegative kontinuierliche Variable)
$x_j \in \mathbb{Z}_+$	Ganzzahligkeitsbedingung (nichtnegative ganzzahlige Variable)
$x_j \in \mathcal{B}$	Binärbedingung (binäre Variable)

(3.3.1) entspricht einer Zielfunktion, die maximiert oder minimiert wird.

(3.3.2) ist ein System von m Gleichungen und/oder Ungleichungen (Nebenbedingungs- oder Restriktionssystem).

(3.3.3) legt den Wertebereich der Entscheidungsvariablen fest. Jede Variable hat einen kontinuierlichen, ganzzahligen oder binären Wertebereich. Hierbei ist über die Definition hinaus möglich, dass einige Variablen im Vorzeichen nicht beschränkt sind ($x_j \in \mathbb{R}$ oder $x_j \in \mathbb{Z}$).

Ausgenommen von dieser allgemeinen Darstellung sind Modelle mit mehrfacher Zielsetzung, sowie Simulationsmodelle, die sich nicht in dieser einfachen Form darstellen lassen.

3.4 Lineare Optimierung

Wenn die Zielfunktion und alle Restriktionen eines Optimierungsmodells Linearkombinationen der Entscheidungsvariablen sind, können Modellierungs- und Lösungstechnologien der linearen Optimierung (Linear Programming, im Folgenden LP) eingesetzt werden. Dabei wird eine gegebene Zielfunktion minimiert oder maximiert, unter Berücksichtigung von linearen Restriktionen, die Gleichungen oder Ungleichungen (\leq oder \geq) sein können. (Suhl & Mellouli, 2005, S. 8f.)

Domschke verdeutlicht, dass die Verfügbarkeit der richtigen Daten eine wichtige Voraussetzung für ein Optimierungsmodell ist. Die in Abb. 4 gezeigten Schritte sind dabei chronologisch durchzuführen

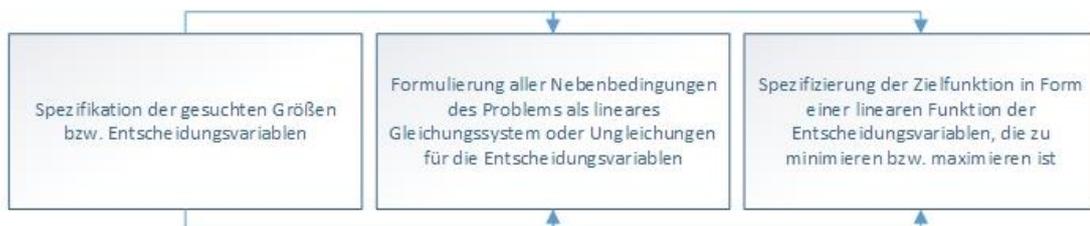


Abbildung 4: Lineares Optimierungsproblem, in Anlehnung an (Domschke, Drexl, Klein, & Scholl, 2015)

Weiterhin wird die LP bereits in den verschiedensten Funktionsbereichen von Unternehmen angewendet und besitzt ihre größte Bedeutung im Bereich der Fertigungsplanung (Produktionsprogramm-, Mischungs-, Verschnittoptimierung).

Einen groben Überblick über wesentliche Beziehungen zwischen den einzelnen Themen, in Zusammenhang mit der linearen Programmierung, gibt Abb. 5. Ein voll ausgezeichneter Pfeil bedeutet dabei, dass B zum Verständnis von A benötigt wird. Ein gestrichelter Pfeil bedeutet, dass die Themengebiete sich indirekt inhaltlich aufeinander beziehen.

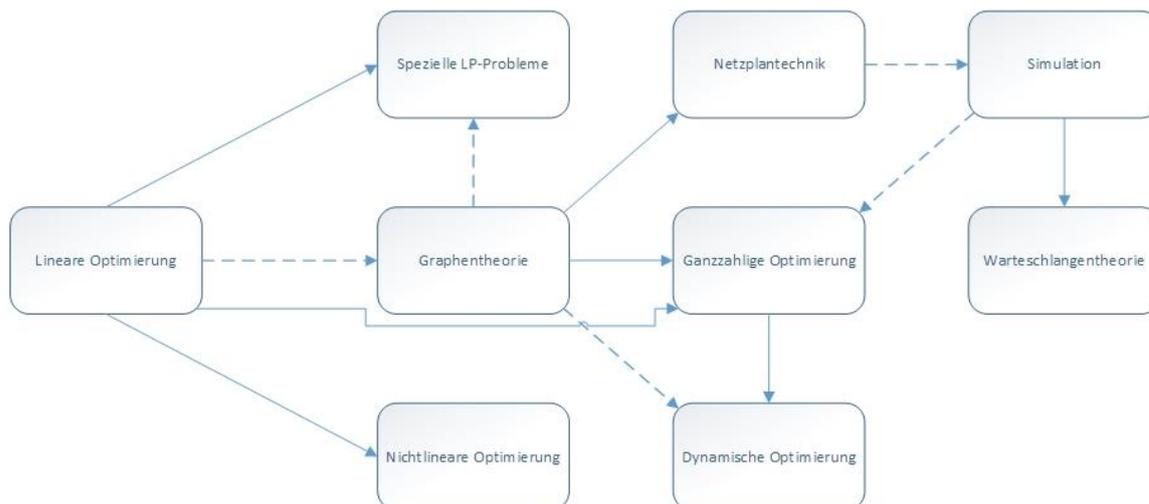


Abbildung 5: Übersicht Themengebiete, in Anlehnung an (Domschke, Drexl, Klein, & Scholl, 2015, S. 6)

Die drei gängigsten Verfahren zur Lösung linearer Modelle sind die Simplex Methode, das Innere-Punkte-Verfahren sowie grafische Lösungsverfahren. Dabei spielt das duale Problem bzw. die Formulierung eines Problems in Normalform sowie dualer Form eine wichtige Rolle. Im Hinblick auf die Eigenschaften des zulässigen Bereichs sind die Begriffe konvexe Linearkombination sowie konvexe Hülle von Bedeutung. Zur genauen Erläuterung der Vorgehen sowie Formulierungen wird auf (Suhl & Mellouli, 2005, S. 35-44) , (Unger & Dempe, 2010, S. 45-59 ff.) und (Domschke, Drexl, Klein, & Scholl, 2015, S. 23) verwiesen.

3.4.1 Entscheidungsvariablen

Die Entscheidungsvariablen entsprechen dem Lösungsraum, sprich Entscheidungsfreiraum, in der gegebenen Entscheidungssituation. Sie können dabei beispielsweise Produktionsmengen einzelner Produkte oder Varianten, Mengen an Zutaten in Mischungen oder Flächen in der landwirtschaftlichen Produktion darstellen. Die Variablen sollten so gewählt werden, dass sie im Sinne der gegebenen Zielfunktion möglichst optimal sind (Suhl & Mellouli, 2005, S. 32).

Die Variablen werden folgendermaßen bezeichnet:

$$x_j, \text{ so dass } l_j \leq x_j \leq u_j \text{ für alle } j \in 1, \dots, n$$

Das heißt, es gibt n Variablen, die jeweils eine (reelle) Untergrenze l_j und Obergrenze u_j haben. Die Variablen können auch nach unten oder nach oben unbeschränkt sein. In dem Fall ist die Unter- bzw. Obergrenze gleich $-\infty$ oder $+\infty$ (Suhl & Mellouli, 2005, S. 32).

3.4.2 Zielfunktion

Die optimale Entscheidung ist besonders von der Zielfunktion abhängig und optimal nur im Hinblick auf die gegebene Zielfunktion. Die Zielfunktion und die schlussendlich erfolgende Entscheidungs- bzw. Handlungsempfehlung hängen somit direkt voneinander ab. Beispielhafte Zielfunktionen sind z. B. Ertrags-, Deckungsbeitrags- oder Gewinnmaximierung, Kostenminimierung sowie Maximierung des ROI. Äußerst wichtig ist, dass die lineare Optimierung nur eine Zielfunktion erlaubt. In der Praxis ist es oft so, dass mehrere Ziele simultan berücksichtigt werden sollen. Das Problem wird gelöst, indem für eine der gewünschten Funktionen die höchste Priorität gesetzt wird, nach der dann optimiert werden kann. Eine andere Möglichkeit ist es, eine Linearkombination mehrerer Zielfunktionen zu nutzen (Suhl & Mellouli, 2005, S. 32 f.).

Die allgemeine Form der Zielfunktion wird dargestellt als:

$$\text{Maximiere bzw. Minimiere } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

3.4.3 Restriktionen

Restriktionen können in der linearen Optimierung als Ungleichungen oder Gleichungen dargestellt werden, wobei die „linke Seite“ eine Linearkombination der Entscheidungsvariablen und die „rechte Seite“ eine reelle Konstante ist. Typische Restriktionen sind z.B. Kapazitätsgrenzen in der Produktion, Verfügbarkeit der Rohmaterialien und prognostizierte Absatzmengen. Weiterhin müssen oft logische oder physikalische Gegebenheiten als Restriktionen definiert werden, damit das Modell korrekt und realitätsnah funktioniert. Oft sind für einzelne Variablen Ober- und/oder Untergrenzen gesetzt, welche auch als Restriktionen anzusehen sind (Suhl & Mellouli, 2005, S. 33).

Die Restriktionen können folgendermaßen dargestellt werden:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq \geq b_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, m\}$$

Wie zu sehen, liegt also für jedes i eine \leq oder \geq Restriktion vor.

3.4.4 Formen und Eigenschaften von LPs

Optimierungsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen

Jedes beliebige LP lässt sich in der folgenden Form aufschreiben:

$$\text{Maximiere } F(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p c_j x_j \quad (3.4.1)$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \leq b_i \text{ für } i = 1, \dots, m \quad (3.4.2)$$

$$x_j \geq 0 \text{ für } j = 1, \dots, p \quad (3.4.3)$$

Analog kann dazu ein Minimierungsproblem formuliert werden, indem in (3.4.1) anstelle der Maximierung eine Minimierung vollzogen wird. Des Weiteren muss die \leq -Beziehung durch eine \geq -Beziehung ersetzt werden. Die Nichtnegativitätsbedingung (im folgenden NNB) (3.4.3) bleibt bei beiden Formen erhalten. Die NNB existiert, da z.B. negative Produktionsmengen keinen Sinn machen. Laut Suhl werden bei LP-Modellen Variablen im Allgemeinen als nichtnegativ vorausgesetzt, daher muss die NNB bei den meisten Softwarepaketen zur Lösung von LP's nicht explizit angegeben werden (Suhl & Mellouli, 2005, S. 38).

Domschke weist darauf hin, dass die Aussagen aufgrund folgender Überlegung gelten:

Eine zu minimierende Zielfunktion $F(x)$ lässt sich durch die zu maximierende Zielfunktion $-F(x)$ ersetzen und umgekehrt, d.h. der Koeffizientenvektor ist mit -1 zu multiplizieren. Eine \leq -Nebenbedingung lässt sich durch Multiplikation beider Seiten mit -1 und eine \geq -Restriktion transformieren.

Eine Gleichung $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b_i$ lässt sich durch zwei Ungleichungen ersetzen:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p \leq b_i \text{ und } -a_{i1}x_1 - \dots - a_{ip}x_p \leq -b_i$$

Falls eine Variable x_j beliebige Werte aus \mathbb{R} annehmen darf, so kann man sie durch zwei Variablen $x_j' \geq 0$ und $x_j'' \geq 0$ substituieren; dabei gilt $x_j := x_j' - x_j''$ (Domschke, Drexler, Klein, & Scholl, 2015, S. 21 ff.)

Die Normalform eines linearen Optimierungsproblems

Erweitert man die Nebenbedingungen (3.4.2) und (3.4.3) um die Schlupfvariablen x_{p+1}, \dots, x_n , die in der Zielfunktion (3.4.1) mit 0 bewertet werden, so entsteht folgendes Modell (Domschke, Drexl, Klein, & Scholl, 2015, S. 21 ff.):

$$\text{Maximiere } F(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^p c_j x_j + \sum_{j=p+1}^n 0 * x_j$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j + x_{p+i} = b_i \text{ für } i = 1, \dots, m_1$$

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j - x_{p+i} = b_i \text{ für } i = m_1 + 1, \dots, m_2$$

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j = b_i \text{ für } i = m_2 + 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \text{ für } j = 1, \dots, n$$

Dabei werden die ursprünglichen Variablen x_1, \dots, x_p als *Strukturvariablen* bezeichnet. Formuliert wie in nachstehenden LP, spricht man von der *Normalform eines LP's*.

$$\text{Maximiere } F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \text{ für } i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \text{ für } j = 1, \dots, n$$

Eine alternative Darstellung der Normalform ist die *Matrixschreibweise*.

$$\text{Maximiere } F(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Unter den Nebenbedingungen

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Dabei haben die verwendeten Symbole folgende Bedeutung:

\mathbf{c}, \mathbf{x} n-dimensionale Vektoren

\mathbf{b} m-dimensionaler Vektor

A ($m \times n$) Matrix

Im Allgemeinen gilt hierbei $n \geq m$ und oft $n \gg m$.

Gelten in der *Matrixschreibweise* folgende Eigenschaften, sagt man, dass LP besitze die kanonische Form.

$$\mathbf{b} \geq 0, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_{n-m} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-m} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \begin{bmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n-m} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

3.5 Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung

Laut Suhl sind viele in der Praxis vorhandene Probleme nur mit ganzzahligen Variablen sinnvoll zu lösen, da eine Teilbarkeit von Ressourcen oft nicht gegeben ist. Rein-ganzzahlige (Integer Programming, im Folgenden IP) oder gemischt-ganzzahlige (Mixed Integer Programming, im Folgenden MIP) lineare Optimierung unterscheidet sich von der (kontinuierlichen) linearen Optimierung nur durch zusätzliche Bedingungen. Es unterliegen nun einige oder alle Variablen der Ganzzahligkeitsbedingung. Es ist beispielsweise notwendig Menschen, Fahrzeuge oder Maschinen, ganzzahligen Mengen bestimmter konkurrierender Möglichkeiten zuzuordnen. Außerdem lassen sich binäre ja/nein-Entscheidungen über die Durchführung potentieller Projekte oder Vorhaben mithilfe von 0/1-Variablen darstellen, wobei logische Abhängigkeiten zwischen Projekten mithilfe dieser speziellen, ganzzahligen Variablen als lineare Restriktionen darstellbar sind (Suhl & Mellouli, 2005, S. 9). Die Zielfunktion und die Restriktionen sind nun linear, die Variablen allerdings diskret.

Im Gegensatz zu linearen Optimierungsmodellen sind ganzzahlige und gemischt-ganzzahlige Modelle in der Regel sehr schwer zu lösen. Die Schwierigkeit wird durch die sogenannte kombinatorische Explosion verursacht: Bereits für kleine Modelle gibt es eine astronomische Anzahl möglicher Wertekombinationen, so dass diese selbst mit schnellen Computern nicht in einer vertretbaren Zeit enumeriert werden können. LP-Lösungstechniken reichen hier nicht aus, da optimale Lösungen der LP-Relaxationen (MIP-Modelle ohne Ganzzahligkeitsforderung) fraktionale Werte aufweisen können.

Aus diesem Grund wurden spezielle Suchstrategien entwickelt, bspw. das Branch-and-Bound, die allerdings im schlechtesten Fall einen exponentiellen Rechenaufwand bezogen auf die Problemgröße erfordern (Suhl & Mellouli, 2005, S. 9).

3.6 Graphentheorie

3.6.1 Grundlagen

Die in diesem Abschnitt definierten Begriffe stammen aus (Domschke, Drexl, Klein, & Scholl, 2015), (Neumann & Morlock, 2002) sowie (Padberg, 2005).

Da im Laufe der späteren Modellierung Graphen verwendet werden, um die Kraftverläufe innerhalb der Gleichgewichtssysteme darzustellen, werden in diesem Abschnitt die notwendigen Graphentheorie-Grundlagen erläutert.

Ein Graph ist ein geordnetes Paar $G = (V, E)$ bestehend aus einer nichtleeren, endlichen Knotenmenge V und einer Kantenmenge E . Hierbei wird zwischen gerichteten und ungerichteten Graphen unterschieden. Ist das jedem Element aus E zugewiesene Knotenpaar nicht geordnet, so wird G als ungerichteter Graph bezeichnet. Hierbei werden die Elemente aus E Kanten genannt. Ist das jedem Element aus E zugewiesene Knotenpaar geordnet, so wird G als gerichteter Graph betitelt und jedes Element aus E als Pfeil kenntlich gemacht. Für ungerichtete Graphen gilt somit $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$. Bei gerichteten Graphen gilt ergänzend $E \subseteq \{(u, v) | u, v \in V, u \neq v\}$. Abb. 6 zeigt diese Unterscheidung anschaulich.

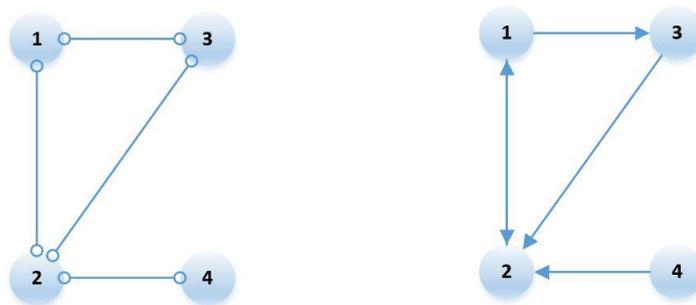


Abbildung 6: gerichteter sowie ungerichteter Graph, eigene Darstellung

Links ein ungerichteter Graph mit $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ sowie rechts ein gerichteter Graph mit $G' = (V, E')$ mit $E' = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 1\}, \{3, 2\}, \{4, 2\}\}$. Hierbei geben die Pfeilrichtungen die Orientierungen der Kanten wieder.

3.6.2 Quelle-Senke-Netzwerke

Flussprobleme können in Netzwerken mithilfe von Graphen modelliert werden. Hierbei ist ein Quelle-Senke-Netzwerk (im Folgenden q-s-Netzwerk) ein kantenbewerteter, gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit der Eigenheit, dass eine Ecke q als Quelle sowie eine Ecke s als Senke bezeichnet wird. Die zwischen Quelle und Senke liegenden Knoten und Kanten können als Zwischenstationen aufgefasst werden. Überdies wird jeder Kante, also eine Verbindung von zwei Ecken im Netzwerk, eine Kapazität c zugewiesen. Sie gibt an, wie viel maximal durch die Kante fließen kann. Im Fall der Statik wäre dies die maximal zugelassene Zug- bzw. Druckspannung innerhalb des Stabträgers, welche mittels der Querschnittsfläche zu einer maximalen Zug- sowie Druckbelastung umgerechnet werden kann.

Ein q-s-Netzwerk entspricht somit folgender Form:

$$N = (G, q, s, c), \text{ mit}$$

$$G = (V, E)$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$c(e) = \text{Kapazität } c \text{ der Kante } e$$

$$q = \text{Quelle}$$

$$s = \text{Senke}$$

3.6.3 Ein q-s Fluss

Um die Ableitung von Kräften innerhalb eines q-s-Netzwerkes darzustellen, wird der Begriff q-s-Fluss benötigt und hiermit eingeführt. Hierbei wird durch eine Funktion f jeder Kante des Netzwerkes eine nichtnegative reelle Zahl zugeordnet, sodass zwangsweise ein Fluss im Netzwerk entsteht. Dieser startet in q , läuft über die Kanten und Ecken und endet schlussendlich in s . Statisch gesehen, ist dieser Ansatz analog zur äußeren statischen Bestimmtheit eines Körpers. Ein System wird hierbei als äußerlich statisch bestimmt bezeichnet, wenn die äußeren Lagerreaktionen ausschließlich durch die GGB aus der Belastung berechnet werden können. Ergo müssen die in das System eingeleiteten Kräfte (Quelle) den Reaktionskräften in den Lagern entsprechen (Senke). Es liegt also ein Gleichgewichtssystem vor, ohne das „innere“ des Systems zu betrachten. Selbige Bedingung wird für ein q-s-Fluss gefordert.

Infolgedessen werden folgende Bedingungen an einen q-s-Fluss gestellt:

$$0 \leq f(k) \leq c(k)$$

Der Fluss durch eine Kante entspricht maximal der Kapazität dieser Kante.

Es kann somit nicht mehr Kraft durch einen Fachwerkstab übertragen werden, als es ihm seine maximale aufnehmbare Kraft (Streckgrenze, Reißgrenze, Bruchgrenze etc.) erlaubt.

$$\sum_{k=(i,j) \in K} f(k) = \sum_{k=(j,i) \in K} f(k)$$

Der Fluss, der pro Zeiteinheit in einen Knoten hinein fließt, muss auch in der gleichen Zeiteinheit wieder hinaus fließen. Diese Bedingung wird Flusserhaltung genannt, wobei der Start und Zielknoten von ihr ausgenommen ist. Der Wert eines Flusses ist also der Nettofluss, der an der Senke s ankommt bzw. aus der Quelle q herausfließt. Eine allgemeine Fragestellung innerhalb der Netzwerke ist es, maximale Flüsse zu finden. Innerhalb dieser Arbeit wird jedoch nur die Flusserhaltung benötigt, um die Kraftverläufe innerhalb der Statik abzubilden.

Im Gegensatz zu der obigen Vorstellung der Flusserhaltung, spielt Zeit in der Statik keine Rolle. Flusserhaltung ist dort mit Krafterhaltung bzw. direkt mit dem Kräftegleichgewicht gleichzusetzen, da Kraft anders als Wasser oder Strom nicht je Zeiteinheit fließt bzw. wirkt.

Bezogen auf folgendes Modell wird also festgesetzt, dass alle in einen Knotenpunkt eingeführten Kräfte auch wieder ausgeführt werden müssen. Somit ist $\sum F = 0$, was zerlegt werden kann

in $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ und obendrein im dreidimensionalen $\sum F_z = 0$. Die drei Indizes x, y, z entsprechen hierbei den drei Raumrichtungen.

Zum Verständnis, inwiefern ein q-s-Fluss eine Erweiterung eines q-s-Netzwerkes darstellt, wird Abb. 7 abgebildet. Der aktuelle Fluss ist in rot gekennzeichnet, die maximalen Kapazitäten in schwarz.

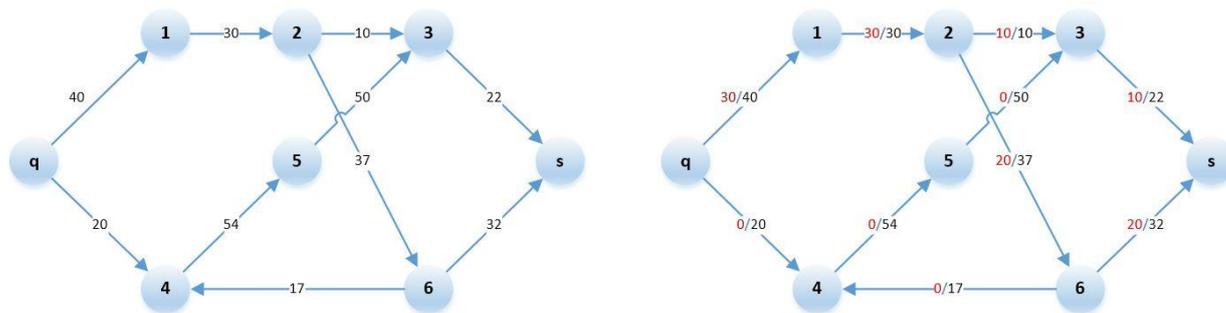


Abbildung 7: Erweiterung eines Netzwerkes um einen zulässigen Fluss, in Anlehnung an (Padberg, 2005, S. 7)

Der Wert eines Flusses kann auch als Nettfluss aufgefasst werden, der an der Senke s ankommt bzw. aus der Quelle q herausfließt. $|f|$ ergibt sich also aus der Summe aller Flüsse aus der Quelle sowie aus der Summe aller Flüsse in die Senke. Es wird also alles, was aus der Quelle heraus fließt, in die Senke hinein fließen.

$$|f| = \sum_{k=(q,i) \in K} f(k) - \sum_{k=(i,q) \in K} f(k)$$

Anhand des Wertes eines Flusses kann also angegeben werden, wie groß die Kraft ist, die durch den aktuellen Kräftefluss abgeleitet werden kann. Im in Abb. 7 aufgeführten Bsp. ergibt sich ein $|f| = 30$, da $f(q, 1) = 30$ und $f(q, 4) = 0$.

Zur Überführung der Graphen in ein Computerprogramm, eignen sich zwei Darstellungsformen. Die Adjazenzmatrix sowie die quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j) \in K \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist der Graph ungerichtet, liegt also eine symmetrische Matrix vor. Für den ungerichteten sowie für den gerichteten Graphen aus Abb. 6 sieht die Matrix wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist der Graph gerichtet, ist die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix (kurz Inzidenzmatrix) eine geeignete Darstellungsform, da sie die Richtung der Kanten wiedergibt. Sie speichert in den Zeilen die Knoten i und in den Spalten die Kanten j . Dabei werden die Richtungen der Kanten folgendermaßen wiedergegeben:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } e_j = (v, i) \text{ für ein } v \in V \setminus \{i\}, \\ -1, & \text{falls } e_j = (i, v) \text{ für ein } v \in V \setminus \{i\}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Anhand der Richtung der Kanten, kann festgelegt werden, welchen Richtungssinn die in den jeweiligen Fachwerksstäben wirkende Zwangskraft besitzt. Hierbei werden die von außen zugeführten Quellkräfte, falls vorhanden, mit in die Berechnung der Zwangskräfte aufgenommen. Es wird eine Vorzeichenkonvention festgelegt: ein pos. Vorzeichen spiegelt eine Zugspannung wieder sowie ein neg. Vorzeichen eine Druckspannung. Die Vorzeichenkonvention wird äquivalent in die Flusserhaltung aufgenommen.

Mit dem Abschluss dieses Kapitels sind alle nötigen mathematischen Grundlagen eingeführt und werden in den anschließenden Kapiteln als gegeben vorausgesetzt.

4 Statik von Fachwerkträgern

Um die Lücke zwischen der mathematischen Optimierung und dem Ingenieurwesen zu schließen, wird in diesem Kapitel die Statik von Fachwerkträgern erläutert. Der Fachwerkträger als solcher wird allgemein definiert und die nötigen Berechnungsgrundlagen werden aufgezeigt. Zuletzt werden verschiedene Verfahren zur Stabkraftermittlung vorgestellt, wobei das in diesem Modell verwendete Verfahren das Lineare Gleichungssystem ist.

4.1 Definition eines Fachwerkträgers

Krings definiert, dass Fachwerkträger aus Einzelstäben bestehen, die untereinander zu unverschieblichen Dreiecken verbunden sind. Die äußeren Kräfte werden als Einzellasten auf die äußeren Knoten konzentriert und als Druck oder Zug in die Stäbe eingeleitet. Die Stabmittellachsen treffen sich in den Knotenpunkten, wo sie zentrisch zu Gelenken verbunden sind. Die praktische Ausführung weicht von diesen modellhaften Annahmen z.T. ab, was die Tragfähigkeit jedoch im Allgemeinen nicht beeinträchtigt. Form und Stabanordnung der Fachwerkträger und –Binder sind unterschiedlich vgl. (Krings & Wanner, 2009, S. 143).

Wie in Abb. 8 zu sehen, bestehen Fachwerkträger aus Auflagern, Knotenpunkten, Untergurt, Obergurt, Vertikalstäben als Pfosten sowie Diagonalstäben als Streben. Äußere Gurtstäbe bilden also den Umriss eines Fachwerks und werden als Obergurtstäbe bezeichnet, wenn sie an der Fachwerkoberseite verlaufen, sowie als Untergurtstäbe wenn sie an der Unterseite liegen. Innere Füllstäbe verlaufen zwischen dem Ober- und Untergurt. Dabei unterscheidet man zwei Fälle, im ersten sind sie geneigt und werden als Diagonale oder Streben bezeichnet, im zweiten verlaufen sie lotrecht zwischen Ober- und Untergurt und heißen Ständer oder Pfosten.

Insbesondere werden die Stäbe, die zu der Übertragung der Lasten von Knotenpunkt zu Knotenpunkt dienen, nur auf Zug oder Druck beansprucht. In dieser Arbeit werden nur ebene Fachwerke behandelt, d.h. alle Stäbe und die am Fachwerk angreifenden Kräfte und Stützkkräfte liegen in einer Ebene.

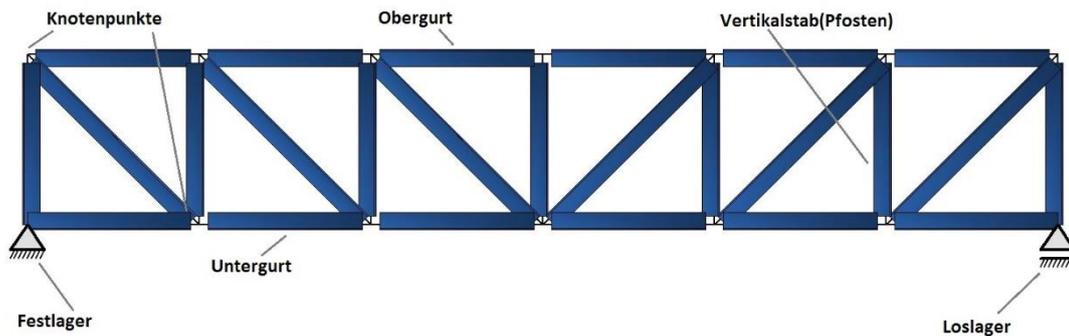


Abbildung 8: Fachwerksreihe

Hierbei werden folgende, besonders für die spätere Berechnung wichtige, Annahmen getroffen vgl. (Czapalla, S. 1):

- Das Fachwerk besteht nur aus starren und geraden Stäben.
- Die Stäbe sind an den Knotenpunkten gelenkig miteinander verbunden (die Knoten sind reibungsfreie Gelenke).
- Die Stabanschlüsse sind zentrisch, d.h. die Schwerlinien der Stäbe (Stabachsen) schneiden sich im Knotenpunkt.
- Die Belastungen greifen als Einzellasten in den Knotenpunkten an. Das Eigengewicht der Stäbe kann auf die Knoten verteilt oder gegenüber der äußeren Belastung vernachlässigt werden.

Fachwerke verbrauchen wenig Material, diese Tatsache senkt die Kosten für den Bau enorm. Als Baustoff kommen sowohl Holz, als auch Stahl zum Einsatz. Sie können hohe Verkehrslasten tragen und werden deshalb häufig für Eisenbahnüberführungen oder Straßenbrücken mit größeren Stützweiten genutzt. Es werden auch Fachwerkträger mit kleineren Spannweiten eingesetzt, das geschieht allerdings aus architektonischen Gründen vgl. (Päffgen GmbH, 2010).

Laut Naumann muss man entscheiden, ob ein Vollwandträger oder Fachwerkträger günstiger ist, zwischen wirtschaftlichen und Konstruktionsaspekten unterschieden werden. Wie oben schon erwähnt, liegt der Vorteil von Fachwerken bei einem geringen Werkstoffverbrauch. Des Weiteren sind sie lichtdurchlässig und besitzen eine höhere Biegefestigkeit bei der Montage. Die Materialeinsparung wächst mit zunehmender Spannweite. Außerdem sind sie vorteilhaft,

wenn z.B. Rohre durch das Fachwerk zu führen sind. Auf der anderen Seite wird bei der Fertigung solcher Fachwerksysteme ein höherer Aufwand betrieben, wodurch die Kosten steigen. Auf Grund der vergrößerten Oberfläche sinkt die Beständigkeit gegenüber Feuer. Außerdem ist bei der Entscheidung der Konstruktionswahl zu beachten, dass Vollwandträger durch ihre großen Flächen ruhiger wirken, dafür erscheinen Fachwerkträger auf Grund des Filigranen leichter vgl. (Naumann, 2011, S. 5).

Fachwerkträger werden laut Falk nach folgenden drei Kriterien eingeteilt (Falk, 2013, S. 68 ff.):

1. Struktur des Stabgitters (Ausfachung)
2. Äußere Form bzw. Form der Gurtlinie
3. Art des Tragwerksystems

Genauere Darstellungen hierzu befinden sich im Anhang A, wobei besonders die Fälle einfaches Streben-Fachwerk, Streben-Fachwerk mit Hilfspfosten, Ständer-Fachwerk mit zur Mitte hin fallenden sowie steigenden Diagonalen, Pfosten-Fachwerk mit gekreuzten Diagonalen, Rauten-Fachwerk, Parallelgurtfachwerk sowie der Fachwerkbrückenträger von Bedeutung sind. Sie werden sich komplett oder in Teilstücken innerhalb der dargestellten Instanzen widerspiegeln. Hierbei wurden alle Ausfachungsarten bewusst als Drahtmodell, anstatt wie in Abb. 8 als Flächenmodell, dargestellt, um die Artverwandtheit zum Flussnetzwerk zu verdeutlichen.

4.2 Berechnungsgrundlagen

4.2.1 Statische Bestimmtheit

Laut Meskouris sind die topologischen Eigenschaften des Stabtragwerks, d.h. Form, Anzahl und Anordnung seiner Stäbe, Lager und Anschlüsse für das mechanische Verhalten verantwortlich.

Es ist zwischen den Fällen statisch bestimmt (1), statisch unbestimmt (2) sowie statisch unterbestimmt (3) zu unterscheiden. Ist die Schnittkraftbestimmung allein durch die Gleichgewichtsbedingungen (im Folgenden GGB) möglich, nennt man das Tragwerk statisch bestimmt. Bei ebenen Systemen stehen je Stabelement drei, bei räumlichen Systemen sechs GGB zur Verfügung (Meskouris & Hake, 1999).

1. statisch bestimmte Systeme:

- Zur Bestimmung der Auflagerreaktionen und der Schnittgrößen reichen Gleichgewichtsbedingungen aus.
- Angaben über die Steifigkeitseigenschaften werden nur zur Berechnung der Verformung benötigt, nicht dagegen zur Schnittgrößenermittlung.

2. statisch unbestimmte Systeme:

- Zur Bestimmung der Schnittgrößen und Auflagerreaktionen sind zusätzlich zu den GGB Formänderungsbedingungen in die Berechnung einzuführen.
- Die Steifigkeitseigenschaften gehen sowohl in die Schnittgrößenermittlung, als auch in die Verformungsberechnung ein.

3. statisch unterbestimmte Systeme:

- Sie sind als Tragwerke unbrauchbar.
- Gleichgewicht ist allenfalls für spezielle Lastfälle möglich.
- Sie sind kinematisch verschiebbar.

Des Weiteren wird laut Czapalla zwischen innerer und äußerer statischer Bestimmtheit unterschieden. Ein Fachwerkssystem, was so konstruiert ist, dass sich die Auflagerkräfte bestimmen lassen, setzt nicht voraus das sich alle Stabkräfte durch die GGB berechnen lassen (Czapalla, S. 6f.).

Die äußere statische Bestimmtheit ergibt sich aus der Bestimmung der Auflagerkräfte, sowie die innere statische Bestimmtheit aus der Bestimmung der Stabkräfte.

Die innere statische Bestimmtheit wird durch folgende Formel berechnet:

$$s = 2k - 3$$

Dabei haben die verwendeten Symbole folgende Bedeutung:

s = Anzahl der Stäbe

k = Anzahl der Knotenpunkte

3 entspricht der Anzahl der GGB in der Ebene

Somit ist ein Fachwerk für:

$s = 2k - 3$ stabil und innerlich statisch bestimmt,

$s > 2k - 3$ stabil, aber innerlich statisch unbestimmt, wobei $s - 2k + 3$ den Grad der statischen Unbestimmtheit angibt

$s < 2k - 3$ labil und nur in Spezialfällen im Gleichgewicht

4.2.2 Nullstäbe

Nullstäbe sind Stäbe, die bei bestimmten Lastfällen weder Zug- noch Druckkräfte erhalten. Laut Czapalla, ist es ratsam, vor der eigentlichen Berechnung das Fachwerk auf sogenannte Nullstäbe hin zu untersuchen. Dabei kann die Bestimmung rechnerisch oder zeichnerisch erfolgen, jedoch werden in beiden Verfahren zuerst die Auflagerkräfte mit Hilfe der drei GGB bestimmt. (Czapalla, S. 14).

Dabei gelten folgende drei Regeln zur Bestimmung von Nullstäben:

1. Sind an einem belasteten Knoten nur zwei Stäbe angeschlossen und greift die äußere Kraft in Richtung des einen Stabes an, so ist der andere Stab ein Nullstab.
2. Sind an einem unbelasteten Knoten zwei Stäbe angeschlossen, die nicht in gleicher Richtung liegen, so sind beide Stäbe Nullstäbe.
3. Sind an einem unbelasteten Knoten drei Stäbe angeschlossen, von denen zwei in gleicher Richtung liegen, so ist der dritte Stab ein Nullstab.

Außerdem wird ein ermittelter Nullstab bei der Ermittlung weiterer Nullstäbe weggedacht. Abb. 9 zeigt die Anwendung der drei Regeln an einer Tragwerksreihe. Alle folgenden Zeichnungen in diesem Abschnitt wurden in Anlehnung an (Czapalla, S. 9 ff.) erstellt.

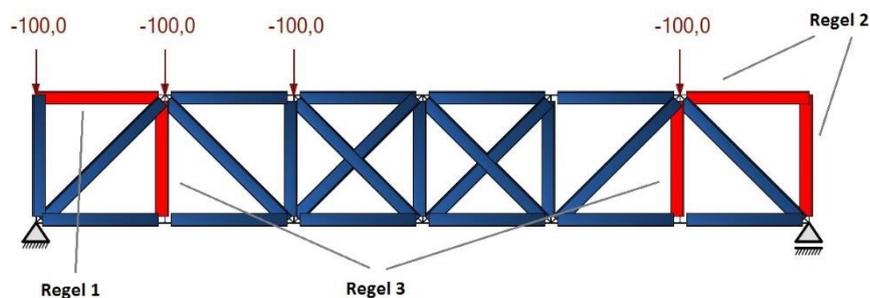


Abbildung 9: Nullstäbe anhand Tragwerksreihe

4.2.3 Bildungsgesetze

Die einfachste Form eines Fachwerks ist aus drei Stäben gebildet, die paarweise an drei Knotenpunkten zu einem Dreieck zusammengeschlossen sind. Laut Czapalla müssen nun bestimmte Regeln bei der Erweiterung dieser einfachsten Form eingehalten werden. Dem Ganzen wird man gerecht in Form der Bildungsgesetze, welche sich in drei Bereiche einteilen lassen (Czapalla, S. 9 f.).

1. Bildungsgesetz

Wie in Abb. 10 ersichtlich, werden an einem Stab zwei Stäbe, die durch einen Knoten miteinander verbunden sind, so angefügt, dass ein Dreieck entsteht. Hierbei sind die angefügten Stäbe in ihrer Mittellinie $x_{(s)}$ rot markiert. Mögliche Verbindungspunkte sind blau gekennzeichnet.

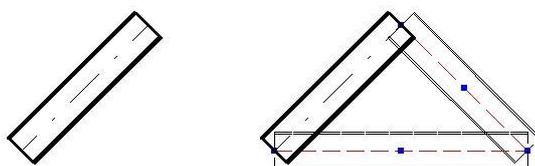


Abbildung 10: Bildungssatz, Teil 1

Ferner fügt man zwei weitere Stäbe an zwei beliebige Knoten des vorhandenen Dreiecks an. Dies kann man beliebig oft fortsetzen. Die zwei neuen Stäbe dürfen aber nicht in einer Geraden liegen, wie aus Abb. 11 hervorgeht.

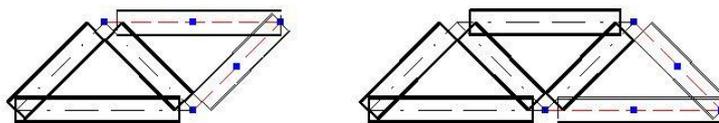


Abbildung 11: 1. Bildungssatz, Teil 2

Bei jedem Schritt erhöht sich die Anzahl der Knoten um eins, die der Stäbe um zwei. Die Bedingung der statischen Bestimmtheit ($s = 2k - 3$) ist stets erfüllt.

2. Bildungsgesetz

Zwei Fachwerke, die nach dem 1. Bildungsgesetz konstruiert wurden, werden durch drei Stäbe miteinander verbunden (s. Abb. 12). Diese Stäbe oder deren Verlängerungen dürfen sich weder alle in einem Punkt schneiden, noch dürfen nicht alle parallel sein.

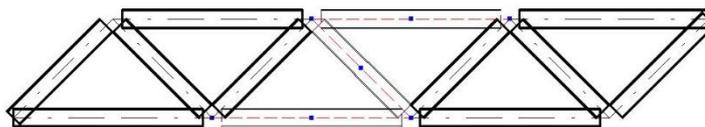


Abbildung 12: 2. Bildungssatz, Teil 1

An die Stelle von zwei Stäben kann auch ein beiden Fachwerken gemeinsamer Knoten treten. Jedoch darf weder der dritte Stab, noch seine Verlängerung durch den gemeinsamen Knoten gehen (s. Abb. 13).

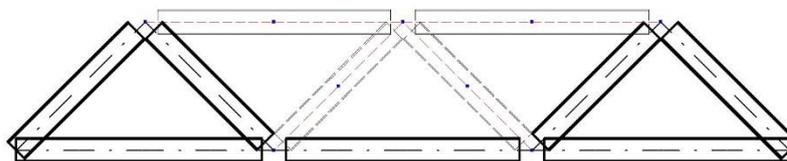


Abbildung 13: 2. Bildungssatz, Teil 2

3. Bildungsgesetz

Bei einem nach dem ersten oder zweiten Bildungsgesetz aufgebautem Fachwerk können ein oder mehrere Stäbe herausgenommen und an anderer Stelle wieder eingefügt werden, sodass das Fachwerk wieder starr wird. Beide Alternativen sind in Abb. 14 sowie 15 dargestellt. Da sich dadurch weder die Anzahl der Stäbe, noch die der Knoten ändert, bleibt die Bedingung $s = 2k - 3$ weiterhin erfüllt.

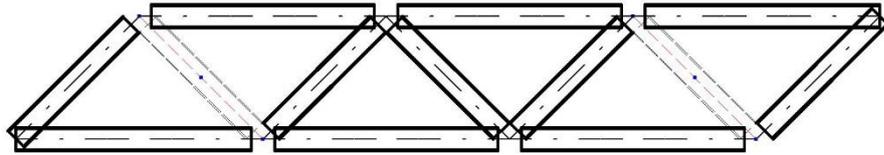


Abbildung 14: 3 Bildungssatz, Teil 1

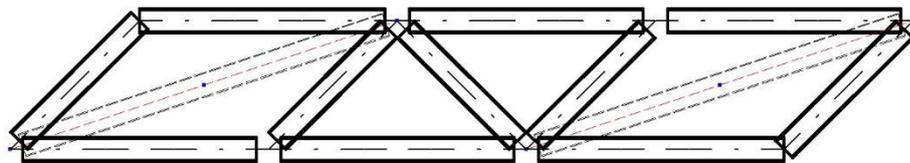


Abbildung 15: 3 Bildungssatz, Teil 2

4.3 Stabkräfte

Für die Bestimmung der Stabkräfte gibt es laut Czapalla rechnerische und grafische Verfahren. Alle dieser hier vorgestellten Methoden zur Ermittlung der Stabkräfte setzen jedoch voraus, dass das ebene Fachwerk innerlich bestimmt ist (Czapalla, S. 17).

- **Ritterschnitt** (rechnerische Ermittlung der Stabkräfte)
- **Lineares Gleichungssystem** (rechnerische Ermittlung der Stabkräfte)
- **Knotengleichgewichtsverfahren** (rechnerische Ermittlung der Stabkräfte)
- **Cremona-Plan** (zeichnerische Ermittlung der Stabkräfte)

Für das in den nächsten Kapiteln diskutierte lineare Modell ist das lineare Gleichungssystem das zugrundeliegende Verfahren.

- Vollständig abgestützte Knoten müssen nicht durch GGB aufgestellt werden, können aber zur Vollständigkeit mit aufgenommen werden.
- Die Summe aller Kräfte in einem nicht abgestützten Knoten muss sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung gleich null sein.
- Mit den Kräften f_i , die jeweils entlang der i -ten Verbindung wirken, erhält man folgende Gleichungen :

$$\text{Knoten 2: } \begin{cases} -wf_1 + f_4 = 0 \\ -wf_1 - f_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Knoten 3: } \begin{cases} f_2 - wf_5 - f_6 = 0 \\ f_3 + wf_5 - 100N = 0 \end{cases}$$

$$\text{Knoten 4: } \begin{cases} -f_4 - wf_5 + wf_8 = 0 \\ -wf_5 - f_7 - wf_8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Knoten 5: } \begin{cases} -wf_6 + f_9 = 0 \\ f_7 - 200N = 0 \end{cases}$$

$$\text{Knoten 6: } \{-wf_8 - f_9 = 0\}$$

Da die Kraft $f_7 = 200N$ direkt abgelesen werden kann, wird sie im Gleichungssystem weggelassen, und der Wert wird auf die rechte Seite gebracht. So lassen sich die Gleichgewichtskräfte als Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems darstellen.

$$\begin{array}{cccccccccc} -wf_1 & 0 & 0 & +f_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\ -wf_1 & 0 & -f_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 & -wf_5 & -f_6 & 0 & 0 & = & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 & +wf_5 & 0 & 0 & 0 & = & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -f_4 & -wf_5 & 0 & +wf_8 & 0 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -wf_5 & 0 & -wf_8 & 0 & = & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_6 & 0 & +f_9 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -wf_8 & -f_9 & = & 0 \end{array}$$

Die Lösungen des Gleichgewichtsproblems ist, auf eine Stelle gerundet, folgender Kraftvektor:

$$\vec{f} = \{-188.6, 133.3, 133.3, -133.3, -47.1, 166.7, 200, -235.7, 166.7\}$$

Hierbei ist der Lösungsvektor \vec{f} um die direkt benachbarte Kraft f_7 ergänzt worden. Tabellarisch kann das ganze wie in Tab. 1 aufgefasst werden:

Tabelle 1: Kräftevektor / LGS

Stab 1	Stab 2	Stab 3	Stab 4	Stab 5	Stab 6	Stab 7	Stab 8	Stab 9	Eingeleitete Kraft
-0,71	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0	0
-0,71	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0	0
0,00	1,00	0,00	0,00	-0,71	-1,00	0,00	0,00	0	0
0,00	0,00	1,00	0,00	0,71	0,00	0,00	0,00	0	100
0,00	0,00	0,00	-1,00	-0,71	0,00	0,00	0,71	0	0
0,00	0,00	0,00	0,00	-0,71	0,00	-1,00	-0,71	0	0
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	1	0
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0	200
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,71	-1	0

Lösungsvektor	
1	-188,6
2	133,33
3	133,33
4	-133,3
5	-47,14
6	166,67
7	200
8	-235,7
9	166,67

Der einfließende Winkel $w := \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, welcher die Verbindungen in ihre horizontalen sowie vertikalen Komponenten zerlegt wurde hierbei auf zwei Nachkommastellen (0,71) angegeben.

Der große Vorteil in diesem Verfahren liegt darin, dass ohne weiteres nachrechnen mehrere Informationen zur Verfügung stehen. Durch betrachten der Matrix/Tabelle kann abgelesen werden, ob ein Stab auf Zug oder Druck belastet ist, anhand des Vorzeichens. Hierbei bedeutet ein positives Vorzeichen eine Zugspannung, sowie ein negatives Vorzeichen eine Druckspannung. Des Weiteren kann innerhalb des linearen Gleichungssystems durch den Faktor w eingesehen werden, ob der vorhandene Stab in einem Winkel angeordnet ist. Eine Information in welche Raumrichtung der Stab angeordnet ist liegt nicht vor. Alleinig der Lösungsvektor reicht jedoch aus, um eine Abschätzung über die Zug/Druck-Verhältnisse im Gleichgewichtssystem zu geben, sodass eine erste Abschätzung über die benötigten Stabkapazitäten gegeben werden kann.

5 Mathematisches Modell

Innerhalb dieses Kapitels wird die mathematische Modellierung, zur statischen Anordnung von Fachwerkträgern, vorgestellt. Vorweg wird dazu eine Übersicht des Modells gegeben. Durch das Verständnis des Bauraums als Flussproblem können statische Tragwerkssysteme erzeugt werden, ohne direkt auf die Kinematik zurückzugreifen. Um die Normalkraftbeanspruchung der Stäbe als Zug bzw. Druck zu interpretieren, ist eine strikte Einhaltung der Vorzeichenkonvention nötig.

5.1 Modellübersicht

Benötigte Variablen

Symbol	Definition
$s \in \{0,1\}^{ NTypes \times (m*n) \times (m*n)}$	$S_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls Stabart } k \text{ zwischen } i \text{ und } j \text{ verbaut ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
$F \in \mathbb{R}^{(m*n) \times (m*n)}$	$F_{i,j}$ = Kraftfluss von i nach j
$x \in \{0,1\}^{(m*n) \times (m*n)}$	$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls Stab zwischen } i \text{ und } j \text{ verbaut ist, indem Kraft vorliegt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
$y \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Binärvariable, die anzeigt, ob ein Stab am Knoten anliegt
$l_i^0 \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Hilfsvariable, die anzeigt, ob an Knoten i eine durchgehende Stablinie der Art 1 verbaut ist
$l_i^1 \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Hilfsvariable, die anzeigt, ob an Knoten i eine durchgehende Stablinie der Art 2 verbaut ist
$l_i^2 \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Hilfsvariable, die anzeigt, ob an Knoten i eine durchgehende Stablinie der Art 3 verbaut ist
$l_i^3 \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Hilfsvariable, die anzeigt, ob an Knoten i eine durchgehende Stablinie der Art 4 verbaut ist
$L \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Binärvariable, die anzeigt, ob ein Nullstab beliebiger Art anliegt
$Va \in \mathbb{R}$	Vertikale Reaktionskraft in Lager A
$Vb \in \mathbb{R}$	Vertikale Reaktionskraft in Lager B

Benötigte Mengen und Parameter

Symbol	Definition
$NTypes$	Menge der Stabtypen $\{0,1,2,\dots\}$
NQ	Menge der Quellkräfte $\{0,1,2,\dots\}$
$Knoten$	Menge der Knoten $\{1,\dots,m*n\}$
$m \in \mathbb{N}$	Breite der Matrix
$n \in \mathbb{N}$	Höhe der Matrix
$w \in \mathbb{R}$	Winkelfunktion $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$c \in \mathbb{R}^{ NTypes }$	$c(NTypes)$ = Kapazität des Stabtyps

$cost \in \mathbb{R}^{ NTypes }$	$cost(NTypes) = \text{Kosten des Stabtyps}$
$Q \in \mathbb{R}^{ NQ }$	$Q(NQ) = \text{Quellkraft der Quellkraftnummer}$
$QLoc \in \mathbb{N}^{ NQ }$	$QLoc(NQ) = \text{Koordinate der Quellkraft}$
$M \in \mathbb{R}$	Big M - entspricht mindestens der maximalen Kapazität eines Stabes

5.2 Interpretation der Statik

Tragwerke spielen im konstruktiven Ingenieurwesen eine große Rolle. Viele Systeme sind auf eine innere oder äußere Tragstruktur angewiesen, welche das mechanische System trägt, die auftretenden mechanischen Belastungen sowie Beanspruchungen aufnimmt und an die Lagerpunkte weiterleitet. Hierbei sind gewichts- oder kostenoptimale Strukturen zu bestimmen. In diesem Modell werden die Kosten minimiert, welche in direktem Verhältnis zum Gewicht stehen. Wird eine zulässige Lösung unter Verwendung weniger Materials gefunden, sinken infolgedessen auch die Kosten. Es findet eine Dimensionierung (engl. sizing) statt.

Schwankungen bei der Güte des verwendeten Materials wie z. B. dem E-Modul, der plastischen Kapazität sowie Fließspannung werden über Sicherheiten in den Materialwerten berücksichtigt. Schwankungen in den Herstellungsverfahren, wie Fertigungsfehler und Toleranzen ebenso. Die Schwankungen könnten zukünftig, unter bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung, durch Zufallsvariablen berücksichtigt werden.

Als äußere Lasten werden statische Lastfälle betrachtet. Hierbei wird angenommen, dass Kräfte nur in Knotenpunkten eingeleitet werden. Die Einleitung einer Kraft zwischen zwei Knoten ist unzulässig. Eine Flächenlast wird durch eine konstante Krafteinleitung über mehrere Knoten hinweg dargestellt. Äußere Lasten wie Wind, Wellen-Lasten etc. werden vernachlässigt. Die Belastung der Brücken durch PKW-, LKW-Verkehr wird, wie oben beschrieben, durch Flächenlasten mit entsprechenden Sicherheiten dargestellt. Wird das Programm zur Optimierung einer statischen Lagerung von z.B. Lagerböcken verwendet, fällt die im späteren vorgestellte Fahrbahnbedingung weg und die Belastung wird als statische Punktlast angenommen.

Weiterhin wird angenommen, dass die Translation und Rotation der Knoten im Betrag so klein ist, dass insgesamt die Geometrie des Tragwerks nicht verändert wird. Somit bleiben auch die inneren Kräfte und Spannungen, unter Einwirkung einer äußeren Last, innerhalb der Fachwerkträger konstant. Die Verschiebung sowie Verdrehung eines Knotens muss nicht berücksichtigt werden. Es steht jeder Knoten für sich, sowie das gesamte System im Gleichgewicht. Frei bewegliche Teilstrukturen innerhalb des Tragwerks sind unzulässig. Das System ist dazu in der

Lage im Gleichgewicht zu verharren, auch unter der Einwirkung der geforderten Lasten. Das Tragwerk ist somit kinematisch stabil und es entstehen keine Verformungen. Bei der Betrachtung von ebenen Tragwerksproblemen wird vorausgesetzt, dass die angreifenden Kräfte nur in der Tragwerksebene wirken. Als Ausnahme werden Stäbe, die sich in der Mitte kreuzen und am Kreuzungspunkt keinen Knoten bilden zugelassen.

Das Leitmotiv dieses Modells ist: statisch zulässige Tragwerke, wie oben beschrieben, zu bilden ohne auf eine direkte Berechnung der Kinematik zurückzugreifen.

Zu den fundamentalen Relationen der Analyse gehören, laut (Marti & Gröger, 2006, S. 6), die folgenden Bedingungen:

1. Gleichgewichtsbedingungen: Die angreifenden Lasten müssen mit den inneren Kräften im Gleichgewicht stehen.
2. Kinematische Verträglichkeit: Ein Verschiebungszustand ist nur dann kinematisch verträglich, wenn alle Einzelemente der Struktur lückenlos zusammenpassen und zusätzlich die kinematischen Randbedingungen erfüllt sind.
3. Materialgesetz: In der klassischen Elastizitätstheorie gilt das Hookesche Gesetz, wonach Spannungen und Dehnungen linear voneinander abhängen. Der maximale Bereich, in dem diese Annahme zutrifft, ist für jeden Werkstoff unterschiedlich und als bekannt anzusehen.

Die Gleichgewichtsbedingungen liefern somit den Zusammenhang zwischen den inneren und äußeren Kraftgrößen, die kinematischen Beziehungen den Zusammenhang zwischen den inneren und äußeren Weggrößen. Das Materialgesetz den Zusammenhang zwischen den inneren Kraftgrößen und den inneren Weggrößen.

Für statisch bestimmte Stabwerke, lässt sich dieser Aspekt, wie in Tabelle 2, darstellen.

Tabelle 2: Verknüpfung der Zustandsgrößen, in Anlehnung an (Meskouris & Hake, 1999, S. 36)

	Kraftgrößen		Weggrößen
äußere Größen	1. Lasten		Verschiebungsgrößen
	2. Gleichgewicht		5. Kinematik
innere Größen	3. Schnittgrößen	4. Werkstoff	Verzerrung

An dieser Stelle ist die Kinematik gestrichen, um zu verdeutlichen, dass sie innerhalb des Modells nicht benötigt wird.

Ermöglicht wird dies, durch die Forderung der inneren und äußeren statischen Bestimmtheit des Tragwerksystems.

Lassen sich die Auflagerkräfte eines Fachwerks allein aus den GGB der Statik ermitteln, so ist das Fachwerk statisch bestimmt gelagert und wird als äußerlich statisch bestimmt bezeichnet. Außerdem kann es, unter der Annahme der Unbeweglichkeit, als starrer Körper betrachtet werden. Im Modell wird diese Bedingung, wie später zu sehen, durch die Aufnahme der Reaktionskräfte der Lager in das Flusssystem realisiert.

Innere statische Bestimmtheit liegt vor, sobald alle Stabkräfte alleine durch die GGB der Statik bestimmt werden können. Da die Kräfte am Knotenpunkt ein zentrales Kräftesystem bilden, müssen sie zwei GGB, nämlich in zwei Raumrichtungen, erfüllen. Das Modell fordert dies, durch Einhaltung der GGB in beiden Raumrichtungen, an jedem Knoten. Ergo ist das System statisch in Ruhe, sobald innere und äußere statische Bestimmtheit vorliegt, ohne die Kinematik zu betrachten. Grundlegende Prinzipien wie das Wechselwirkungsprinzip (Actio und Reactio) sowie das Energieerhaltungsgesetz der newtonschen Mechanik werden vorausgesetzt bzw. direkt am Modell erläutert.

Innerhalb des Modells fordern die zwei Bedingungen auf der folgenden Seite die äußere statische Bestimmtheit, wobei dazu die Reaktionskräfte V_a , V_b später in die betroffenen GGB mit aufgenommen werden. Ein H_a , also eine horizontale Reaktionskraft im Festlager A liegt nicht vor, da nur vertikale Kräfte als Quellkräfte eingeleitet werden. Bestimmt werden die Reaktionskräfte der Lager durch die Summe der Momente um selbige. Dabei wird eine Drehung gegen

den Uhrzeigersinn als positiv angenommen. Der Knotenpunkt des Festlagers (Lager A) ist $m * n - m + 1$, die des Loslagers (Lager B) $m * n$. Im Falle von Lager A ist dies der erste Eintrag der letzten Spalte, im Falle von Lager B der letzte Eintrag der letzten Spalte. In der Berechnung von Lagerkraft A werden die Momente, welche aus den Quellkräften und den dazugehörigen Hebelarmen zum betrachteten Lager hin bestehen, negativ bewertet, da sie ein Moment im Uhrzeigersinn auslösen würden, ergo ein Drehsinn entgegengesetzt der positiven Drehrichtung. Innerhalb der Matrix ist der erste Eintrag eine eins, sodass zur Messung des Hebelarms die Position der betrachteten Quellkraft $QLoc_i$ um eine Längeneinheit des Stabes reduziert werden muss, sodass der Hebelarm $QLoc_{i-1}$ entsteht. Das endgültige Moment, auch hinsichtlich des Drehsinns, ist zuletzt $-Q_i * QLoc_{i-1}$. Diesbezüglich ist $QLoc_i$ der Parameter, innerhalb dessen die Position des Angriffspunktes der Quellkraft abgespeichert ist. Aufsummiert wird, da innerhalb der ersten Reihe beliebig viele Quellkräfte eingeleitet werden können. Entgegengesetzt dieses Momentes wirkt das Moment erzeugt aus der vertikalen Reaktionskraft im Lager B, Vb , und ist daher mit einem pos. Vorzeichen versehen. Da diese Kraft stets nur einmalig vorhanden ist, muss nicht aufsummiert werden. Der Hebelarm dieses Momentes entspricht der Spannweite des Tragwerkes, also dem Abstand von Lager A zu B und somit $(m - 1) * Sl$. Um das Lager B herum entstehen pos. Momente durch die Quellkräfte, da diese Gewichtsbelastungen darstellen und Gewichtskräfte stets in negative vertikale Richtung wirken, aufgrund des Erdschwerefelds (Gravitation). Siehe hierzu die Vorzeichenkonvektion, Kapitel 5.3. Der Hebelarm entspricht der kompletten Spannweite abzüglich der Koordinate der Quellkraft. Das Moment sieht also wie folgt aus: $Q_i * (m - QLoc_i) * Sl$. Analog zum vorherigen Fall, wird das Moment entstehend aus der vertikalen Lagerkraft A subtrahiert. Wie bereits vorher erwähnt, entstehen keine horizontalen Lagerkräfte aufgrund der Quellkraft, da diese nur eine vertikale Komponente aufweist. Quellkräfte die direkt an und über den Lagern eingeleitet werden und somit keinen Hebelarm besitzen, werden durch die GGB an diesen Knoten berücksichtigt. Die Werte und Belastungsart an den Lagern können, innerhalb der Lösung der jeweiligen Instanz, abgelesen bzw. ausgegeben werden und zur Dimensionierung des Lagers herangezogen werden. Im Folgenden wird angenommen, dass die Lager ausreichend dimensioniert sind und somit keine kritischen Komponenten im System darstellen.

Lagerkraft A:

$$-\sum_{i \in NQ} Q_i * QLoc_{i-1} * Sl + Vb * (m - 1) * Sl = 0 \quad \forall i \in \text{Knoten}$$

Lagerkraft B:

$$\sum_{i \in NQ} Q_i * (m - QLoc_i) * Sl - Va * (m - 1) * Sl = 0 \quad \forall i \in \text{Knoten}$$

Die innere statische Bestimmtheit wird durch die Bedingungen, wie in Kapitel 5.3 beschrieben, gefordert. Dabei findet eine Aufteilung der Kräfte in die Raumrichtungen (x für horizontal, y für vertikal) statt. Die Vorzeichenkonvention ist dabei strikt einzuhalten, um ein späteres Interpretieren des Vorzeichens in der Lösung als Zug bzw. Druckbeanspruchung zu ermöglichen. Hiermit gehen auch einige Sonderfälle einher.

1. Es stehen max. drei Stäbe zur Kraftaufnahme zur Verfügung, wobei der Knoten als Quellknoten genutzt werden kann. Gegebenenfalls muss also eine Quellkraft mit in das Gleichgewichtssystem aufgenommen werden. Fall 1 ist immer der Knoten $i = 1$ und stellt somit keinen Bereich dar. Es gilt: $i \in \text{Knoten} \mid i = 1$ für horizontale Kraftkomponenten, sowie $i \in \text{Knoten} \mid i = 1 \wedge (k \in NQ \mid QLoc_k \neq 1)$ für vertikale Kraftkomponenten. $QLoc_k \neq 1$, da im Falle einer Quellkraft ($QLoc_k = 1$), die GGB in vertikaler Richtung entsprechend erweitert werden muss, in horizontaler Richtung bleibt alles identisch (s. Abb. 18).

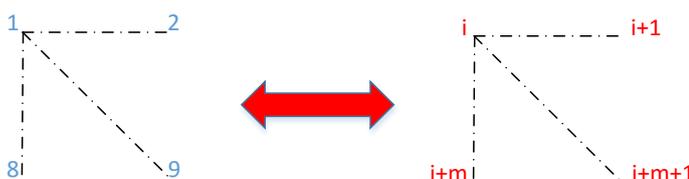


Abbildung 18: Sonderfall 1

2. Es stehen max. drei Stäbe zur Kraftaufnahme zur Verfügung, wobei der Knoten stets als Senke benutzt wird. Fall 2 entspricht dem Knoten des Loslagers, es wird somit die vertikale Reaktionskraft des Lagers V_b mit in die Gleichgewichtsbetrachtung aufgenommen. Die horizontale Reaktionskraft im Lager wird wie im Kapitel 5.2 aufgefasst und somit hier nicht aufgeführt. Fall 2 ist immer der Knoten $i = m * n$ und stellt somit keinen Bereich dar. Es gilt: $i \in \text{Knoten} \mid i = m * n$ für horizontale sowie vertikale Kraftkomponenten (s. Abb. 19).

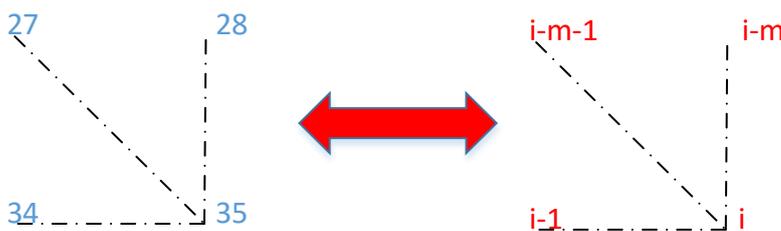


Abbildung 19: Sonderfall 2

3. Es stehen max. fünf Stäbe zur Kraftaufnahme zur Verfügung. Hierbei handelt es sich um einen Bereich an Knoten, wobei $i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 0 \wedge i \geq 2m \wedge i \leq n * m - m$ für horizontale und vertikale Kraftkomponenten gilt. Für den Operator Modulo gilt: $\text{mod} : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Z}, (i, m) \rightarrow i \bmod m := i - \lfloor \frac{i}{m} \rfloor * m$. Ist $i \bmod m = 0$ ist sichergestellt, dass der betrachtete Knoten sich am rechten Rand des Bauraumes befindet. Analog dazu gilt für $i \bmod m = 1$, dass der Knoten sich am linken Rand des Bauraumes

befindet (vgl. Fall 4). Mittels der Bedingungen $i \bmod m \neq 0,1$ kann analog formuliert werden, dass nur mittige Knoten angesprochen werden sollen (s. Abb. 20).

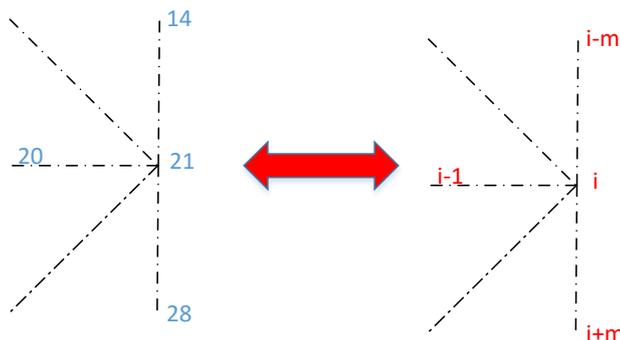


Abbildung 20: Sonderfall 3

4. Es stehen max. fünf Stäbe zur Kraftaufnahme zur Verfügung. Hierbei handelt es sich um einen Bereich an Knoten, wobei $i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 1 \wedge i \geq m + 1 \wedge i \leq n * m - m$ für horizontale und vertikale Kraftkomponenten gilt. Kongruent zu Fall 3 legt $i \bmod m = 1$ fest, dass der linke Rand betrachtet wird (s. Abb. 21).

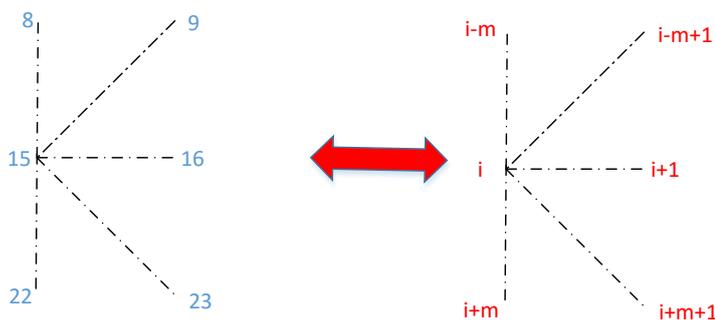


Abbildung 21: Sonderfall 4

5. Es stehen max. drei Stäbe zur Kraftaufnahme zur Verfügung, wobei der Knoten als Quellknoten genutzt werden kann. Fall 1 ist immer der Knoten $i = m$ und stellt somit keinen Bereich dar. Es gilt: $i \in \text{Knoten} \mid i = m$ für horizontale Kraftkomponenten, sowie $i \in \text{Knoten} \mid i = m \wedge (k \in NQ \mid QLoc_k \neq m)$ für vertikale Kraftkomponenten analog zu Fall 1 (s. Abb. 22).

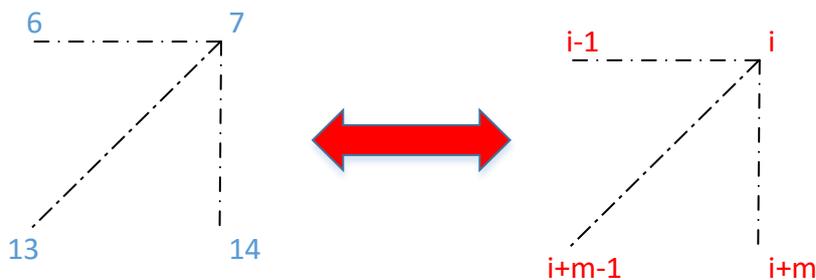


Abbildung 22: Sonderfall 5

6. Es stehen max. drei Stäbe zur Kraftaufnahme zur Verfügung, wobei der Knoten stets als Senke benutzt wird. Fall sechs entspricht dem Knoten des Festlagers, es wird somit die vertikale Reaktionskraft des Lagers V_a mit in die Gleichgewichtsbetrachtung aufgenommen. Es gilt: $i \in \text{Knoten}, i = m * n - m + 1$ für horizontale sowie vertikale Kraftkomponenten (s. Abb. 23).

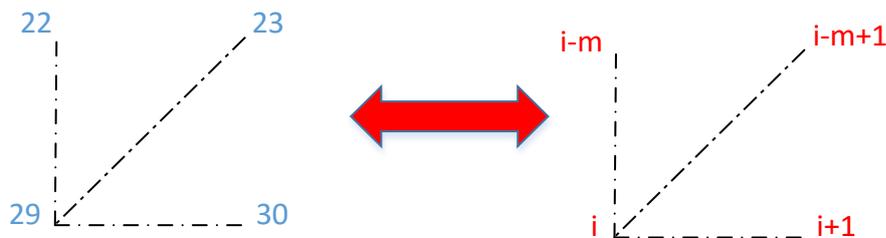


Abbildung 23: Sonderfall 6

7. Es stehen max. fünf Stäbe zur Kraftaufnahme zur Verfügung. Hierbei handelt es sich um einen Bereich an Knoten, wobei für horizontale Kraftkomponenten $i \in \text{Knoten} \mid i \geq 2 \wedge i \leq m - 1$ gilt, für vertikale Kraftkomponenten gilt: $i \in \text{Knoten} \mid i \geq 2 \wedge i \leq m - 1 \wedge (k \in NQ \mid QLoc_k \neq i)$. $QLoc_k \neq i$ analog zu Fall 1 bzw. 5 (s. Abb. 24).

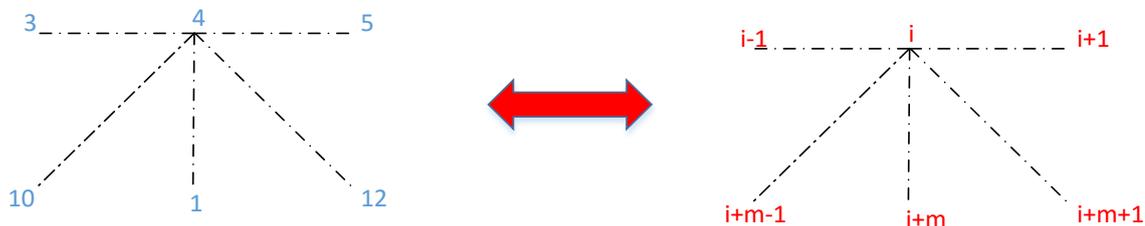


Abbildung 24: Sonderfall 7

8. Es stehen max. fünf Stäbe zur Kraftaufnahme zur Verfügung. Hierbei handelt es sich um einen Bereich an Knoten, wobei für horizontale sowie vertikale Kraftkomponenten $i \in \text{Knoten} \mid i \geq m * n - m + 2 \wedge i \leq m * n - 1$ gilt (s. Abb. 25).

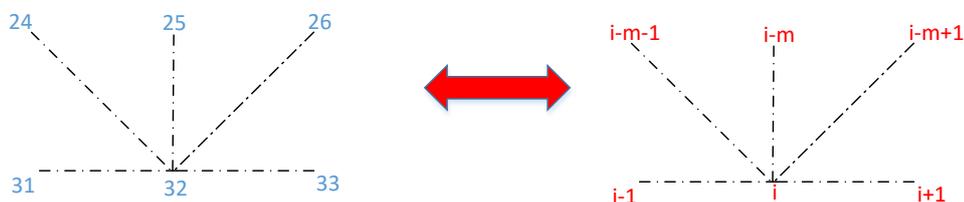


Abbildung 25: Sonderfall 8

Fall 9 stellt den Fall eines allgemeinen Knoten dar. Es stehen alle Stäbe zur Kraftaufnahme zur Verfügung, also insgesamt acht Stück. Dabei handelt es sich um einen Bereich an Knoten, wobei für beide Kraftkomponenten $i \in \text{Knoten} \mid i \geq m + 2 \wedge i \leq (m * n) - m - 1 \wedge i \bmod m \neq 0, i \bmod m \neq 1$ gilt (s. Abb. 26).

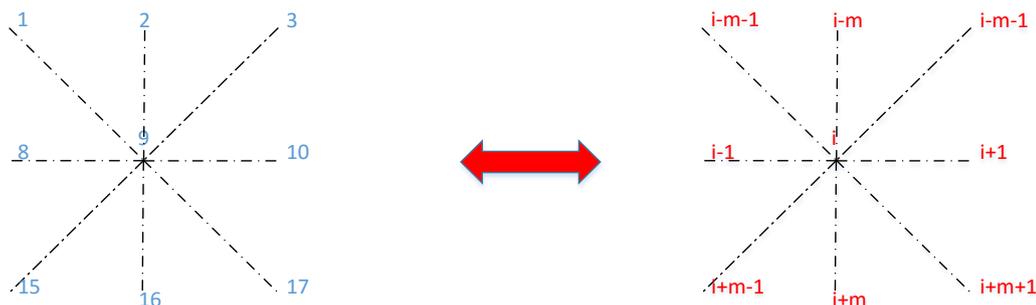


Abbildung 26: Sonderfall 9, allgemeiner Knoten

Es ist nötig eine Vorzeichenkonvention für die Schnittgrößen, bzw. Aufteilung der Normalkräfte, innerhalb der Fachwerkstäbe, in x sowie y-Richtung, einzuführen. Vorerst wird jedoch der Übergang von der tatsächlichen Nummerierung hinzu der Formulierung über ein Indexpaar (i, j) dargestellt. Hierbei ist i der Zeilenindex sowie j den Spaltenindex. Allgemein würde also $F_{i,j}$ die Kraft in einem Stab, der von i nach j angeordnet ist, darstellen. Hierbei ist $F_{i,j} = F_{j,i}$, da das Wechselwirkungsprinzip (Actio und Reactio) sowie das Energieerhaltungsgesetz der newtonschen Mechanik gilt. Formuliert durch die Bedingung:

Actio=Reactio:

$$F_{i,j} = -F_{j,i} \quad \forall i, j \in \text{Knoten}$$

Es ist sichergestellt, dass an beiden Enden des Fachwerkstabes die betragsmäßig gleichen Kräfte wirken (Energieerhaltung) und das Wechselwirkungsprinzip erfüllt ist, da Knoten j die inverse Kraft zu Knoten i aufnehmen muss. Innerhalb des Stabes wirkt an jedem Punkt die gleiche Kraft sowie Spannung, da der Querschnitt konstant ist. Es kann keine Kraft verloren gehen.

Die Vorzeichenkonvention wird anhand des allgemeinen Knoten, Fall 9, erläutert. Wie in Abb. 27 zu sehen ist, werden die Indizes zur Beschreibung der Knotenlage in Rot gekennzeichnet. Die wirkenden Kräfte vom betrachteten Knoten aus (i) sind schwarz dargestellt, sowie ihre Reaktionskräfte braun. Die möglichen eingepprägten Kräfte, innerhalb der Stäbe, sind blau dargestellt. Hierbei ist wichtig, dass nicht alle möglichen Kraftkombinationen dargestellt wurden, um die Darstellung übersichtlich zu halten. In allen angewinkelten Stäben, in Bezug auf die x sowie y-Ebene, könnten auch die gegenteiligen Kräfte, also Reaktionskräfte wirken. Hierzu kann man sich den dargestellten Lastfall „umgedreht“ vorstellen. Die Aktionskraft, also vom betrachteten Knoten aus, wird zur Reaktionskraft, also zum betrachteten Knoten hin, sowie anders herum. In den nicht angewinkelten Lastfällen sind alle möglichen Lastfälle dargestellt, da jeweils nur eine Kraftkomponente vorliegt. Das Prinzip der Wechselwirkung spiegelt sich unverkennbar innerhalb der Indizes wieder, sie sind jeweils nur gedreht, wie z.B. $F_h^{i-1,i} \equiv F_h^{i,i-1}$.

Die Aufteilung der Kräfte in horizontale sowie vertikale Kraftkomponenten findet, wie in Kapitel 4.3.1 erläutert, über die Winkelfunktion w statt. Um schlussendlich die Kräfte im Tragwerkssystem als Zug oder Druck-Normalspannung interpretieren zu können wird ein übergeordnetes Koordinatensystem festgelegt. Die pos. x-Richtung verläuft somit nach rechts, die pos. y-Richtung nach oben. Damit haben die eingeleiteten Quellkräfte ein negatives Vorzeichen und die Auflagerkräfte ein positives, da sie die Reaktionskräfte der Quellkräfte in Bezug auf die äußere statische Bestimmtheit sind. Für alle anderen Fälle erübrigen sich, wie vorher beschrieben, die jeweiligen Kraftkomponenten der Stäbe und es müssen ggf. Quellkräfte sowie Lagerkräfte berücksichtigt werden.

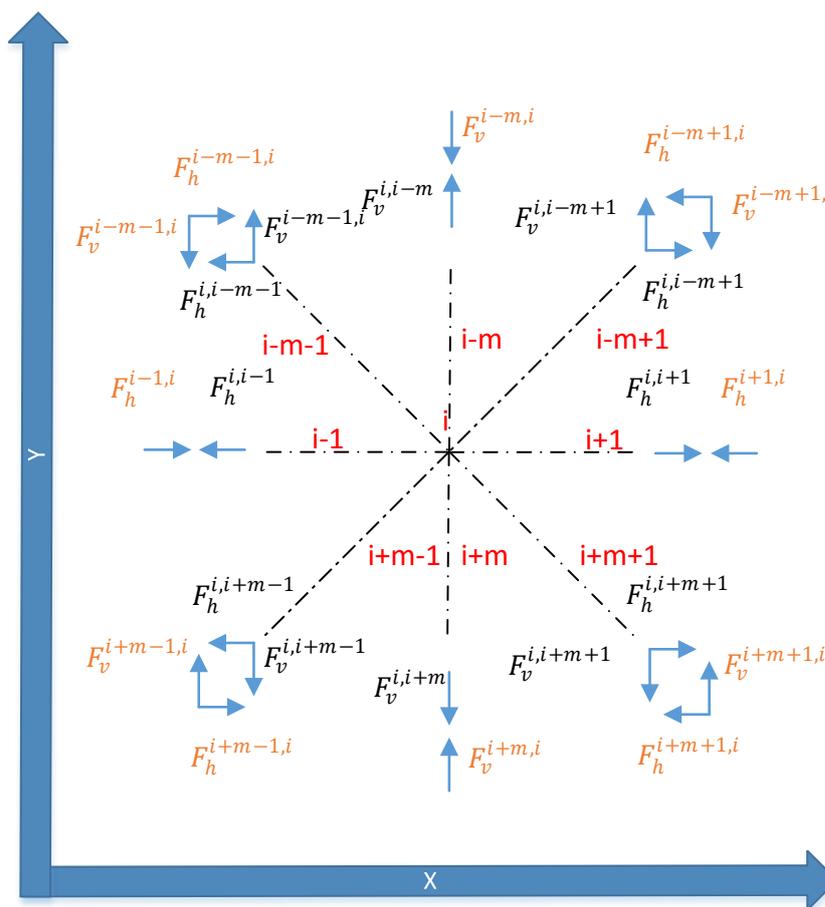


Abbildung 27: Vorzeichenkonvektion, eigene Darstellung

Schlussendlich können unter Anwendung der Sonderfälle und ihrer Gültigkeitsbereiche, der Vorzeichenkonvektion und der Winkelfunktion w , die linearen Bedingungen, jeweils in horizontaler sowie vertikaler Komponente, aufgestellt werden. Hiermit sind die Bedingungen aus Kapitel 4.3.1, zur Berechnung eines Fachwerks anhand eines LGS, formuliert.

- Die Kräfte sind über die GGB bestimmt. Ihre horizontalen und vertikalen Komponenten seien F_x bzw. F_y . Nicht rechtwinklige Verbindungen werden über $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ zerlegt.
- $\varphi = \frac{\pi}{4} \equiv 45^\circ$. Zur Vereinfachung wird $w := \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gesetzt
- Die Summe aller Kräfte in einem nicht abgestützten Knoten muss sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung gleich null sein.

GGB – Sonderfall 9 stellt den allgemeinen Knoten dar. GGB – Sonderfälle 1-8 alle anderen Fälle.

Um den Kraftfluss sicherzustellen, falls ein Stab gesetzt wurde, bzw. um sicherzustellen, dass nur eine Kraft fließt falls ein Stab vorhanden ist, wird folgende Bedingung eingeführt:

Kraftfluss:

$$F_{i,j} \leq M * x_{i,j} \quad \forall i,j \in \text{Knoten}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich mit Hilfe der „Big-M“ Methode als lineare Ungleichung darstellen. Dabei ist M eine genügend große Zahl, welche mindestens der maximalen Kapazität, die auf der Kante auftreten kann, entsprechen muss. Innerhalb dieser Arbeit entspricht die Kante dem Fachwerkstab.

Liegt der Fall vor, dass eine Kraft eingeleitet wird, muss diese Quellkraft für die Fälle 1,5 sowie 7 mit in die GGB aufgenommen werden. Das Prinzip der Kraftaufteilung in horizontal und vertikal bleibt bestehen, jedoch ist eine Änderung der Formulierung der GGB in horizontaler Richtung nicht nötig, da alle Quellkräfte vertikale Kräfte sind und somit nur gewinkelt angeordnete und vertikale Stäbe betrifft. Ergo reicht die neu eingeführte, zusätzliche Forderung, in Kombination mit den schon vorhandenen Forderungen aus. Der Gültigkeitsbereich muss jedoch angepasst werden. Es muss sichergestellt werden, dass eine Quellkraft im Knoten vorliegt, also gilt: $i \in NQ$. NQ ist hierbei der Parameter, welcher die Anzahl der Quellkräfte in der Form

$NQ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \end{pmatrix}$ speichert. Für den Fall 7 gilt, dass der Angriffsknoten der Quellkraft nicht Knoten

1 sowie Knoten m sein darf, also $QLoc_i \neq 1 \wedge QLoc_i \neq m$. Für den Fall 1 gilt $i \in NQ \wedge QLoc_i = 1$ und analog dazu für den Fall 5 $i \in NQ \wedge QLoc_i = m$.

Die GGB für den Fall der Krafteinleitung sehen somit wie folgt aus:

Krafteinleitung:

$$\begin{aligned} -F_{QLoc(i),QLoc(i)+m} - w * F_{QLoc(i),QLoc(i)+m-1} - w * F_{QLoc(i),QLoc(i)+m+1} - Q_i &= 0 & \forall i \in NQ \mid QLoc_i \neq 1 \\ & & \wedge QLoc_i \neq m \end{aligned}$$

$$-F_{QLoc(i),QLoc(i)+m} - w * F_{QLoc(i),QLoc(i)+m+1} - Q_i = 0 \quad \forall i \in NQ \mid QLoc_i = 1$$

$$-F_{QLoc(i),QLoc(i)+m} - w * F_{QLoc(i),QLoc(i)+m-1} - Q_i = 0 \quad \forall i \in NQ \mid QLoc_i = m$$

Damit die Kapazität, also die maximale Belastung der Stäbe nicht überschritten wird, werden Bedingungen zur Kapazitätsbeschränkung eingeführt.

Innerhalb des Modells wird mit maximalen Zug/Druckkräften gearbeitet. Diese werden zuvor aus dem entsprechenden Material, was für die jeweilige Instanz Verwendung findet, ermittelt. In den folgenden Instanzen wird größtenteils ein St 37-2 (alte Bezeichnung) Grundstahl/Bau-stahl verwendet. Der aktuelle Kurzname ist S235JR nach DIN EN 10027-1. Es wird, aufgrund verschiedener Sicherheitsfaktoren, eine maximale ruhenden Belastung von $150 \frac{N}{mm^2}$ ange-nommen, was wiederum in diesem Fall einem Sicherheitsfaktor von 100% entspricht. Relativ trivial können alle nötigen Größen über die Beziehungen $Q_{vorh} = \frac{F}{A} \left[\frac{N}{mm^2} \right]$, $F_{zul} = Q_{zul} * A_{\emptyset} [N]$ sowie $A_{min} = \frac{F}{Q_{zul}} [mm^2]$ bestimmt werden. Die entsprechenden Kosten pro LE können verschiedenen Anbieterseiten, je nach Profil, entnommen werden. Innerhalb der Instanzen sind alle Preise ohne Mengenrabatt gewählt worden.

Zur Kapazitätsbeschränkung wird die Bedingung aufgestellt, dass die Kraft im jeweiligen Stab $F_{i,j}$ kleiner bzw. maximal gleich der Summe der Kapazitäten in Abhängigkeit vom Stabtyp von i nach j sein darf. Die Kraft muss somit so gewählt werden, dass die Kapazität nicht überschrit-ten wird.

Kapazitätsbeschränkung:

$$F_{i,j} \leq \sum_{k \in NTypes} c_k * S_{k,i,j} \quad \forall i, j \in Knoten$$

Die Variable $S_{k,i,j}$ ist eine drei-dimensionale Matrix der Form {Stabart, Knoten i, Knoten j} und binär.

Der Gültigkeitsbereich wird durch die Bedingung

Gültigkeitsbereich:

$$\sum_{k \in NTypes} S_{k,i,j} = x_{i,j} \quad \forall i, j \in Knoten$$

festgelegt. Es kann sich nur für eine Stabart entschieden werden, solange auch ein Stab dort gesetzt ist. Wie in den vorherigen Forderungen, muss auch hier die Kapazitäten sowie die Stabbelegung definiert werden. Es folgt:

Stabexistenz:

$$S_{k,i,j} = S_{k,j,i} \quad \forall i, j \in \text{Knoten}$$

$$\wedge k \in \text{NTypes}$$

$$x_{i,j} = x_{j,i} \quad \forall i, j \in \text{Knoten}$$

Je nach Instanz kann es sein, dass eine Fahrbahn benötigt wird. Um die erste Zeile der Knotenmatrix mit 1 zu belegen, wird folgende Nebenbedingung formuliert:

Forderung – Fahrbahn:

$$\sum_1^m x_{i,i+1} = m - 1$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \leq m$$

5.4 Erweiterung Nullstäbe

Erreicht die Druckbelastung einen kritischen Wert, kann ein Stab bzw. allgemein eine elastische Struktur ausweichen, indem sie sich seitlich deformiert und somit eine neue Gleichgewichtslage einnimmt. Dieses Phänomen ist innerhalb der Statik unzulässig, da Gleichgewichte mit gerader Stabachse unabdingbar sind. Man spricht von der sogenannten Stabknickung.

Die Stabilität von komplexen Bauwerken aus Fachwerkstäben, z. B. von Brücken, Kränen, Dachkonstruktionen usw., ist durch eine ausreichende Sicherheit gegen Knicken der auf Druck belasteten Stäbe zu gewährleisten. Das Versagen (Knicken) eines Druckstabes kann zum Versagen der gesamten Konstruktion führen. (Weinberg & Fritzen, 2011, S. 200)

In gewissen Fällen ist es nötig, dass im vorherigen erklärte Modell, um die sogenannten Nullstäbe zu erweitern. Der grundlegende Gedankengang zu Nullstäben, wurde schon in Kapitel 4.2.2 beschrieben.

Mit Hilfe der Eulersche Knickfälle kann die kritische Kraft (F_k) ermittelt werden, ab wann ein gerader Stab unter einer richtungstreuen Kraft versagt, welche in Richtung der Stabachse des unverformten Stabes wirkt, vgl. hierzu (Weinberg & Fritzen, 2011, S. 201).

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Charakteristisch ist hierbei, dass die Knicklänge l_k , sich je nach Euler-Fall, von $l_k = \frac{1}{2}l$ bis zu $l_k = 2l$ unterscheidet, wobei l die Länge des Stabes ist. Durch geschicktes Einfügen von Nullstäben in die Konstruktion, können günstigere Eulerfälle geschaffen und somit die Gefahr des Knickens reduziert werden. Wie in Abb. 28 zu sehen ist, nimmt der zusätzliche Stab keine Kraft auf, stabilisiert das System aber hinsichtlich Knickung.

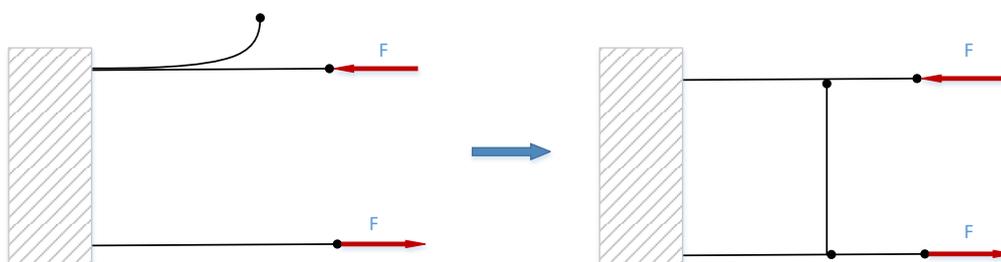


Abbildung 28: Innere Kopplung, in Anlehnung an (Schuhmacher, 2004, S. 9)

Innerhalb des Flusssystems können die Nullstäbe als innere Kopplungen von zwei Knoten interpretiert werden. Um sicherzustellen, dass die Nullstäbe im System berücksichtigt sind, werden die drei Regeln zur Analyse von Nullstäben, aus Kapitel 4.2.2, mit in das Modell aufgenommen.

Grundlegend werden hierzu sechs mögliche Stabkombinationen betrachtet, welche aus dem allgemeinen Knoten (Fall 9) entstehen können. Im Folgenden werden Stabkombinationen als Linien bezeichnet. Wie in Abb. 29 zu sehen ist, sind davon zwei zulässig sowie vier unzulässig. Liegt ein Randfall vor, sodass nicht alle Stabrichtungen möglich sind, fallen die entsprechenden Linien weg. Wird eine Kraft ein oder ausgeleitet, müssen diese Kräfte berücksichtigt werden. Die blau markierten Linien sind hierbei zulässig, die roten hingegen nicht. Die Variable $l_{i,0}$ sowie $l_{i,1}$ entspricht einer horizontalen sowie vertikalen Linie. Die Variablen $l_{i,2}, l_{i,3}$ den angewinkelten Linien. Alle vier Variablen sind binär und dienen der Identifikation ob solch eine Linie vorliegt.

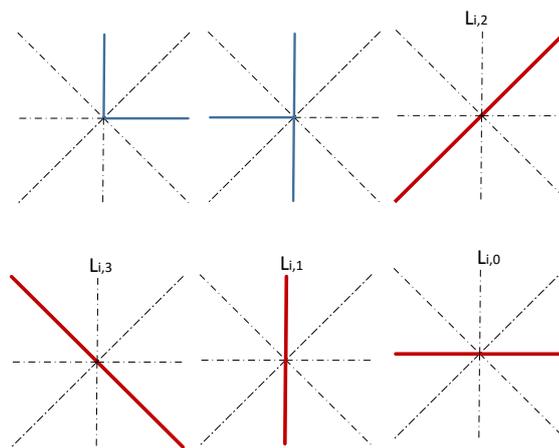


Abbildung 29: Fallunterscheidung Nullstäbe, eigene Darstellung

Das Modell kann nun, beispielhaft für Fall 1, erweitert werden. Alle anderen Fälle befinden sich in der Modellübersicht, siehe Kapitel 5.1.

Nullstab – Fall 1:

$$x_{i,i+1} + x_{i,i-1} \leq l_i^0 + 1 \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m \neq 0$$

$$\wedge i \bmod m \neq 1$$

$$x_{i,i+1} + x_{i,i-1} \geq 2 * l_i^0 \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m \neq 0$$

$$\wedge i \bmod m \neq 1$$

$$l_i^0 = 0 \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 0$$

$$\forall i \bmod m = 1$$

Hierbei wird die Variable l_i^0 auf eins gesetzt, sobald zwei Stäbe, also eine Linie, vorhanden ist. Ist nur ein Stab vorhanden, wird l_i^0 auf null gesetzt.

Um schlussendlich das System um einen Stab zu erweitern, falls eine Linie vorliegt, wird folgende Bedingung, beispielhaft für den allgemeinen Knoten, eingeführt:

Nullstab – Forderung allgemein:

$$\sum_{z=0}^3 l_i^z \leq 4 * L_i$$

$$\forall i \in \text{Knoten}$$

$$x_{i,i-m-1} + x_{i,i-m} + x_{i,i-m+1} + x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i+m} + x_{i,i+m+1} \geq 3 * L_i$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m + 2$$

$$\forall i \leq m * n - m - 1$$

$$\forall i \bmod m \neq 0$$

$$\forall i \bmod m \neq 1$$

Für den Fall, dass min. eine Linie vorhanden ist, also $\sum_{z=0}^3 l_i^z \in \{1,2,3,4\}$, gilt $L_i = 1$. In der darauf folgenden Bedingung wird gefordert, dass am allgemeinen Knoten $\sum x_{i,j} \geq 3$ gilt. Dies entspricht der Konstruktion einer Stabkombination aus mindestens drei Stäben. Eine Konstruktion aus zwei Stäben, in der Form $l_{i,0}$ bis $l_{i,3}$, ist ohne die Erweiterung um einen zusätzlichen Stab somit nicht zulässig.

Analog dazu wird das Modell um die Fälle, wie in Abb. 17 zu sehen, erweitert. Weiterhin müssen die Fälle der Krafteinleitung (Quellknoten) sowie Kraftausleitung (Lager) gesondert betrachtet werden.

6 Auswertung

Zur Lösung der Instanzen des vorgestellten Modells, wurden die Programme GUSEK (GLPK Under Scite Extended Kit) sowie CPLEX (IBM ILOG CPLEX Optimization Studio) verwendet. GUSEK kann zur Lösung von Problemen der linearen Optimierung, sowie der ganzzahligen linearen Optimierung, verwendet werden. Hierbei wird das mathematische Modell innerhalb einer Datei des Formates .mod gespeichert. Anschließend kann das Modell direkt mittels GUSEK gelöst werden. Ist es zu komplex, dann steigt die Laufzeit auf ein nicht annehmbares Maß an, sodass ein effizienterer Solver wie z. B. CPLEX benötigt wird.

Im Anhang befinden sich alle hier diskutierten Instanzen, .mod Dateien, sowie Zeichnungen. Der GUSEK Quellcode des Ausgangsmodells wird ebenfalls angegeben. Alle Daten, sowie weitere Instanzen, befinden sich in den jeweiligen Ordnern auf der beigefügten CD.

Zur Auswertung der Instanz wird die jeweilige .sol Datei, ausgegeben von CPLEX, betrachtet. Für dieses Modell stellt die dreidimensionale Matrix:

$$s \in \{0,1\}^{|NTypes| \times (m*n) \times (m*n)} \quad S_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls Stabart } k \text{ zwischen } i \text{ und } j \text{ verbaut ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

alle benötigten Informationen zur Zeichnung der Lösung zur Verfügung. Sie gibt Info darüber, welche Stabkapazität von Knoten i zu Knoten j verbaut wurde. Ausgegeben wird sie in der Form:

```
<variable name="S(2,1,2)" index="10" value="1"/>
```

Es ist somit ein Stab der Kapazität zwei, vom Knoten eins zu zwei verbaut. Der Wert "value="1" entspricht einer genutzten Kante, der Wert "value="0" einer nicht genutzten Kante bzw. einem nicht verbaute Stab.

Zur Nachverfolgung der Kräfte in einzelnen Stäben oder Knotenpunkten, sowie der Bestimmung ob eine Zug oder Druckspannung vorliegt, kann der Kraftvektor

$$F \in \mathbb{R}^{(m*n) \times (m*n)} \quad F_{i,j} = \text{Kraftfluss von } i \text{ nach } j$$

ausgelesen werden.

Zur Dimensionierung der Lager, werden die entsprechenden Reaktionskräfte der Lager aus den Variablen $Va \in \mathbb{R}, Vb \in \mathbb{R}$ ausgewertet. Ausgelesen wurden alle Instanzen per Hand, um sie später in den entsprechenden CAD / FEM-Programme zu bewerten.

6.1 Instanz 1: Hebezeug

Instanz 1 ist eine statische Lagerung eines Hebezeugs. Die entsprechenden Hebezeug-Komponenten, wie z. B. Hubmotor, Getriebe sowie Winde, sind auf einen Traglastbereich bis max. 25 Tonnen bzw. ≈ 250 kN pro Hebezeug ausgelegt. Wie in allen Instanzen ist links das Festlager, sowie rechts das Loslager angeordnet. Die genauen Instanz-Werte, sowie die Zeichnung sind der Anlage C (S.75) bzw. der beigefügten CD zu entnehmen.

Der Bauraum beinhaltet eine Spannweite von 40 LE, sowie einer Höhe von 3 LE. Innerhalb dieser Arbeit entspricht eine LE einem Meter. Es befinden sich somit $m = 41$ Knoten in der Breite, sowie $n = 4$ in der Höhe, was insgesamt einer Anzahl von 164 Knoten entspricht. Die Querknoten, also die entsprechenden Hebezeuge, befinden sich symmetrisch alle 10 LE über der Spannweite verteilt, ergo an den Knoten 11, 21 sowie 31. Die Fahrbahnbedingung muss nicht erfüllt werden.

Innerhalb dieser Instanz wurde die Krafterleitung bewusst symmetrisch gewählt und die Kräfte äquivalent. Intuitiv würde ein Ingenieur einen symmetrischen Aufbau aufgrund der Querkraftverteilung erwarten. Des Weiteren wurden, im Gegensatz zu Instanz 2, relativ große Stabkapazitäten im Verhältnis zur Belastung gewählt. Die Differenz zwischen zwei Kapazitäten ist deutlich höher als in Instanz 2, außerdem liegen nur 4 Stabarten vor. Mutmaßlich sollte eine schlanke und effiziente Struktur entstehen.

Wie in dem Flussnetzwerk Anlage C (S.75) zu sehen, haben sich beide Vermutungen, unter den im folgendem erläuterten Einschränkungen, bewahrheitet. Die Struktur ist vergleichsweise symmetrisch. Es wurden im Verhältnis viele Stäbe mit einer hohen Kapazität gewählt und es ist eine schlanke Struktur entstanden, im Gegensatz zu Instanz 2 Anlage C (S.78).

Im Vergleich von Ausschnitt 1 sowie 2, erkennt man, dass im ersteren vermehrt horizontale Stäbe verwendet werden. Mutmaßlich werden diese verwendet, um die horizontalen Kräfte zum linken Festlager zu leiten. Da sich rechts ein Loslager befindet, können diese dort nicht aufgenommen werden und müssen somit dem Kraftfluss zum Festlager, über die dort angeordneten Stäbe, folgen. Dem Querknoten 11 sowie 31 ist gemein, dass direkt an ihnen, alle Stabmöglichkeiten genutzt werden, in Richtung zum nächstgelegenen Lager. Die komplette Querkraft muss erstmalig aufgenommen werden und ab dort, bevorzugend angewinkelt, abgeleitet werden. Das Verhältnis von im Winkel angeordneten Stäben zu horizontalen bzw. vertikalen Stäben ist relativ eindeutig. Insgesamt erscheint die Nutzung von höheren Kapazitäten inkl. höherer Preise, in Summe günstiger, als das Nutzen von niedrigeren Kapazitäten.

Optimierungsbedarf in Sachen Nullstäbe wird durch einen Vergleich von Bereich drei sowie vier deutlich. In beiden Bereichen ist der Aufbau symmetrisch und die Stabauswahl ist die gleiche, jedoch werden in Abschnitt drei die Nullstäbe in die Fachwerkstruktur hinein gebaut, in vier jedoch nicht. Das Ganze macht sich dadurch bemerkbar, dass für letzteren Abschnitt 4 Stäbe mehr benötigt werden, um die gleiche Funktion zu erfüllen. Die Forderung aus Kapitel 5.4, dass ein Nullstab eine innere Kopplung von zwei Knoten darstellt, ist somit hier nicht erfüllt. Die Lösung ist zulässig, jedoch nicht optimal in Bezug auf die Nullstabanordnung. Ein möglicher Ansatz, geschlossene Strukturen für Nullstäbe zu erzeugen, wäre die Verwendung von geschlossenen Kantenzügen, auch Eulerzug genannt.

Zukünftig wäre ein weiterer Ansatz, symmetrische Strukturen zu erkennen und einzufordern. Vergleicht man die Abschnitte im Bereich der Knoten 13-18 und 24-29, werden jeweils drei Nullstäbe verwendet, um die symmetrische Struktur zu ermöglichen. Nullstäbe sind innerhalb der Zeichnungen jeweils farblich gekennzeichnet (siehe Legende). Da die Anzahl der Nullstäbe identisch ist, liegt ein identischer Zielfunktionswert vor, weswegen das Modell nicht unterscheidet. Generell werden symmetrische Fachwerkstrukturen als harmonischer wahrgenommen, wodurch Brücken wie die Lansdowne-Brücke in Sukkur / Pakistan sowie die Howrahbrücke in Kolkota, in der Vergangenheit, unter Kritik rieten. Sie wurden rein aus statischen Gesichtspunkten erbaut. Der deutsche Brückenbauer Fritz Leonhardt urteilte in seinem Buch "Brücken, Ästhetik und Gestaltung":

„Mit Fachwerken sind schon abschreckende Brücken gebaut worden mit einer verwirrenden Unordnung der Stabführung. So ist die erste Hooghly-River-Brücke in Kalkutta in meinen Augen eine der hässlichsten Brücken, die täglich von Tausenden von Menschen und Fahrzeugen benutzt werden muss. (Leonhardt, 1994)“

Verlauf eins sowie zwei lassen vermuten, dass es von Vorteil ist, gleichartige Stäbe im Verlauf der Kraft anzuordnen. Anstatt die Quellkräfte zuerst nur in waagerechter oder senkrechter Richtung abzuleiten, werden sie vornehmlich angewinkelt abgeleitet. Hierbei ist zu beachten, dass angewinkelte Stäbe Kräfte in beide Raumrichtungen aufnehmen können und so unter Umständen Nullstäbe eingespart werden können. Es ist eine auffallende Ähnlichkeit zum Streben – Fachwerk (siehe Anlage A S. 62) festzustellen, wobei der Obergurt oder Untergurt nicht zu betrachten ist, da in dieser Instanz keine Fahrbahn gefordert ist.

6.2 Instanz 2: Eisenbahnbrücke

Instanz 2 ist eine Eisenbahnbrücke mit 100 LE Spannweite, vgl. hierzu Flussnetzwerk 2 Anlage C (S. 78). Es wird eine Flächenlast von max. 5 t/LE bzw. ≈ 5 kN/LE abgestützt. Dazu wird an jedem Knoten der Fahrbahn, also jedem Quellknoten, eine Kraft von 5 kN eingeleitet. Für den normalspurigen Eisenbahnverkehr ist in Deutschland auf Strecken mit Normalverkehr das Lastmodell 71 anzusetzen. Dieses entspricht den Meterlasten der Streckenklasse D4. Es werden für Standard Neu- und Ausbaubrücken 8,0 t/m gefordert. Da in diesem Modell zweidimensional gearbeitet wird, werden 4,0 t/m angenommen. Um weitere 25% Sicherheit aufzuschlagen, wird mit 5,0 t/m gerechnet.

Der Bauraum beinhaltet 100 LE Spannweite, sowie eine Höhe von max. 2 LE. Insgesamt liegen 303 Knotenpunkte vor. Davon sind Knoten 1 bis 101 Quellknoten und die Fahrbahnbedingung muss erfüllt sein, sodass all diese Knoten belegt werden müssen. Um zu erfassen, wie viele Nullstäbe für die Fahrbahn, also horizontal, im Vergleich zum restlichen Bauraum, Anwendung finden, werden diese als Fahrbahn zugelassen, unabhängig von der Tatsache das sie keine Kräfte aufnehmen können.

Durch die Verwendung von acht verschiedenen Stabkapazitäten und einer niedrigeren Differenz zwischen diesen, als in Instanz 1, sollte eine stark ausgebaute Struktur entstehen. Es ist zu vermuten, dass viele Stäbe kleinerer Kapazität, jedoch keine Nullstäbe, in der horizontalen angeordnet werden. Sie können zur Kraftübertragung genutzt werden und erhöhen den Zielfunktionswert nur marginal mehr, als ein Nullstab.

Grundlegende Vorüberlegungen haben sich bestätigt. Es werden an den Lagern die stärksten Stabkapazitäten verwendet um die Kraft, mittels der drei zur Verfügung stehenden Stabmöglichkeiten, aufnehmen zu können. Von der Mitte bis hin zum Lager werden immer höhere Stabkapazitäten verwendet, da die Belastung auch steigt. Das gleiche Phänomen spiegelt sich in der Fahrbahn wieder. Ungleich der Annahme, werden in der Fahrbahn auch höhere Stabkapazitäten verwendet. Es findet eine Weiterleitung horizontaler Kräfte innerhalb der Fahrbahn statt. Die Struktur ist teilweise, wie in Instanz 1, nicht komplett symmetrisch.

Innerhalb der gesamten Struktur werden 7 Nullstäbe verwendet, davon 5 als Fahrbahnelemente und 2 angewinkelt innerhalb der Struktur. Bei Einer Anzahl von 303 Knotenpunkten, stellt dies einen sehr geringen Wert dar.

Hauptkenntnis dieser Instanz ist, dass sie analog zu einer Auslagerbrücke interpretiert werden kann. Laut (Gotsch, 2014) waren die ersten großen Auslagerbrücken rautenförmige, doppelseitige Turmausleger, durch die die Fahrbahn hindurchgeführt wurde. Materialsparender sind jedoch Auslagerbrücken, deren Fachwerke nur unterhalb der Fahrbahn liegen. Sie ähneln häufig Bogenbrücken, sind jedoch nicht eindeutig von Brücken mit Fachwerkbalken abzugrenzen. Genau dieser Fall liegt in dieser Instanz vor. Siehe hierzu auch Anhang A, Fachwerkbrückenträger sowie Anlage C (S. 80 oben).

Die typische Ausführung aus zwei Kragträgern, die sich in der Mitte gegenseitig mittels Drehgelenk abstützen, spiegelt sich wieder. Dabei werden vertikale sowie transversale Kräfte im Drehgelenk aufgenommen, wobei letztere innerhalb dieses Modells vernachlässigt werden. Vgl. hierzu Abb. 30: Der Viaduc du Viaur, eine einspurige stählerne Eisenbahnbrücke, gebaut gegen Ende des 19. Jahrhunderts. Innerhalb der Instanz, spiegelt der Bereich vom Knoten 48-53 diese Bauweise wieder. Aufgrund der Winkelfunktion w entsteht jedoch kein Bogen und die Bauweise des spitzen Zulaufs ist nur mittig vorhanden, da die geringe Bauhöhe von 2 LE nicht mehr zulässt.



Abbildung 30: Viaduc du Viaur (Bodin P.J, abgerufen am 05.01.2016)

7 Fazit

Die grundlegende Problemstellung dieser Arbeit war ein mathematisches Optimierungsmodell zur statischen Anordnung von Fachwerkträgern.

Zu diesem Zweck wurde ein MIP formuliert, welches für einen gegebenen Lastfall ein Gleichgewichtssystem aus Fachwerkstäben verschiedener Kapazitäten liefert, wobei die Anschaffungskosten sowie das Gesamtgewicht des verbrauchten Materials minimal sind.

Wie in Kapitel 5.3 und 5.4 zu sehen, können durch das Verständnis des Bauraums als Flussproblem statische Tragwerkssysteme erzeugt werden. Um die Normalkraftbeanspruchung der Stäbe als Zug bzw. Druck zu interpretieren, ist eine strikte Einhaltung der Vorzeichenkonvektion nötig.

Der Ansatz dieses Modells unterscheidet sich grundlegend von aktuellen Sizing-Problemen, bei denen gegebenen Grundstrukturen Stabvolumina und somit Kapazitäten zugewiesen werden. Es wird die komplette vorgegebene Grundstruktur, also Stabanordnung, beibehalten und hinsichtlich des Volumens minimiert. Vor der Optimierung muss eine zuvor berechnete Stabanordnung vorhanden sein. Innerhalb dieses Ansatzes wird jedoch keine vorhandene Stabanordnung optimiert, sondern eben diese optimale Anordnung gefunden, welche hinsichtlich Kosten und Gewicht optimal ist. Dabei können der Fall einer Brücke, wobei eine Fahrbahn ausgebaut sein muss, sowie z. B. eine Kranbrücke ohne Fahrbahnbedingungen, vorliegen.

Insgesamt konnten, vgl. Abschnitt 6.2, einige grundlegende Analogien zu vorhanden Fachwerkssystemen entdeckt werden. Es sind Gemeinsamkeiten mit dem Strebenfachwerk sowie dem markanten Mittelteil der Auflagerbrücke vorhanden. Innerhalb einer Instanz von 303 Knotenpunkten, wurden 7 Nullstäbe verwendet, wovon 5 als Fahrbahnelement und nur 2 angewinkelt innerhalb der Struktur verwendet wurden. Bei einer Anzahl von 303 Knotenpunkten, stellt dies einen sehr geringen Wert dar. Zukünftig ist zu prüfen, ob durch den Vergleich von Instanzen mit realen Bauten, Konzepte zur Vermeidung von Nullstäben im Brückenbau formuliert werden könnten. Innerhalb der beiden geprüften Instanzen sind Nullstab-Strukturen entstanden, welche aus der eigentlichen Struktur heraus gerichtet sind. Dies gilt es zukünftig zu vermeiden. Die entstandenen Strukturen sind verhältnismäßig symmetrisch, jedoch wurde nicht berücksichtigt inwiefern die Normalkraftstäbe miteinander verbindbar sind. Unter Einbezug der konstruktiven Verbindungsmöglichkeiten könnten weitere Kosten eingespart werden.

Um das Modell zu erweitern, bietet sich eine Betrachtung ebener Stabtragwerke mit nichtlinearen Flächenlasten und einer Einleitung von Quellkräften in beliebigen Winkeln sowie beliebige Momente an. Über eine Bestimmung von Verschiebungen bzw. Knoten-Verträglichkeiten könnten minimale Verschiebungen, wie es in der Realität der Fall ist, zugelassen werden. Zugleich sollten Restriktionen eingeführt werden, welche symmetrische Strukturen, bei gleichem Zielfunktionswert, bevorzugen. Mit der zusätzlichen Forderung, dass Nullstäbe sich innerhalb von übergeordneten Strukturen befinden müssen, könnte eine optimale und zugleich optisch ansprechende Fachwerkstruktur ermittelt werden. Um den Anschlussmöglichkeiten eines Fachwerks in der Praxis gerechter zu werden, sollten verschiedene Stabkombinationen bevorzugt werden, sodass unnötig teure Anschlusskonfigurationen ausgeschlossen sind. Vorstellbar ist eine Erweiterung der Lager bzw. Senken, mit den entsprechenden Kosten verbunden, da zwei Lager nicht immer die optimale Lösung bei großen Instanzen darstellen werden. Hierbei sollte das Modell selbst entscheiden, wieviel Lager optimal sind.

Weiterhin könnten in der ebene wirkende Flächentragwerke, wie z.B. Platten und Scheiben, betrachtet werden und eine Alternative zur herkömmlichen Strukturoptimierung darstellen. Grundsätzlich sind viele Anwendungsfelder vorstellbar, so kann z.B. ein in der Ebene arbeitender Roboter mit zwei translatorischen Freiheitsgeraden auch als Stabfachwerk aufgefasst werden. Für folgende Arbeiten wäre die Betrachtung von dreidimensionalen Strukturen interessant. Das Modell ist grundsätzlich dafür ausgelegt.

Literaturverzeichnis

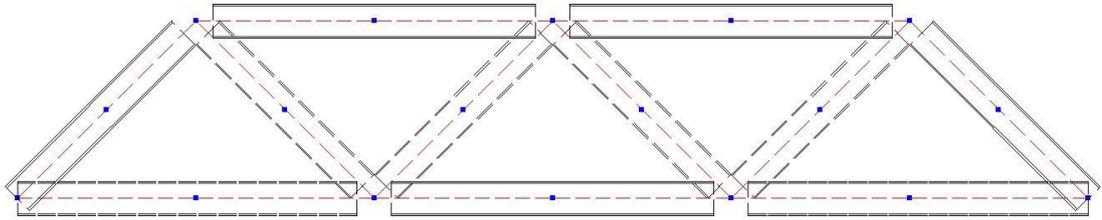
- Bodin, P. J. (kein Datum). *Internationale Datenbank für Bauwerke und Bauingenieure*. Abgerufen am 05. 01 2016 von structurae: <https://structurae.de/bauwerke/viaur-viadukt>
- Burkard, R. E., & Zimmermann, U. T. (2012). *Einführung in die Mathematische Optimierung*. Berlin: Springer-Verlag.
- Czapalla, O. (kein Datum). *derfuessel.de*. Abgerufen am 16. 02 2016 von <http://derfuessel.de/unterlagen/studium/s01statik/fachwerktraeger.pdf>
- Dempe, P. (2010). *Skript zur Vorlesung Optimierung linearer Modelle*. Freiburg.
- Domschke, W., Drexl, A., Klein, R., & Scholl, A. (2015). *Einführung in Operations Research*. Springer Gabler.
- Duden. (06. 01 2016). *Duden*. Abgerufen am 06. 01 2016 von <http://www.duden.de/rechtschreibung/Optimum#Bedeutung1>
- Falk, A. (2013). *Baumechanik 1*. Lemgo: Hochschule Ostwestfalen-Lippe.
- GOR. (2016). *GOR*. (Uni Paderborn) Abgerufen am 06. Februar 2016 von <http://tinyurl.com/zvgmm62>
- Gotsch, K. (2014). <http://www.karl-gotsch.de/Lexikon/Auslegerbr.htm>. Abgerufen am 01. 04 2016 von <http://www.karl-gotsch.de/Lexikon/Auslegerbr.htm>
- Krings, W., & Wanner, A. (2009). *Kleine Baustatik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Leonhardt, F. (1994). *Brücken : Ästhetik und Gestaltung*. Stuttgart: Dt. Verl.-Anstalt.
- Marti, K., & Gröger, D. (2006). *Stochastische Strukturoptimierung von Stab- und Balkentragwerken*. Heidelberg: Springer.
- Meskouris, K., & Hake, E. (1999). *Statik der Stabtragwerke*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Nationalbibliothek, D. (06. 01 2016). *Katalog der deutschen Nationalbibliothek*. Abgerufen am 06. 01 2016 von <https://portal.dnb.de/opac.htm?method=simpleSearch&cqlMode=true&query=idn%3D945982887>
- Naumann, T. (2011). *Bemessung und Ausführung eines Fachwerkträgers nach dem Bemessungskonzept des Eurocode 3*. Lunzenau: Hochschule Mittweida.

- Neumann, K., & Morlock, M. (2002). *Operations Research*. Hanser Fachbuch.
- Padberg, C. (11. Januar 2005). *Fh-Wedel*. Abgerufen am 16. 03 2016 von <http://www.fh-wedel.de/archiv/iw/Lehrveranstaltungen/WS2004/SeminarMC/Ausarbeitung15PadbergFlussprobleme.pdf>
- Päffgen GmbH. (2010). *brueckenbau.de*. Von http://www.brueckenbau.de/informationen/verschiedene_brueckenarten/#chapter-3-2 abgerufen
- Schuhmacher, A. (2004). *Optimierung mechanischer Strukturen*. Hamburg: Springer.
- Suhl, L., & Mellouli, T. (2005). *Optimierungssysteme, Modelle, Verfahren, Software, Anwendung*. Paderborn: Springer-Verlag.
- Unger, T., & Dempe, S. (2010). *Lineare Optimierung*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Weinberg, K., & Fritzen, C.-P. (2011). *Elastostatik*. Siegen: Uni-Siegen.
- Werners, B. (2013). *Grundlagen des Operations Research*. Berlin: Springer Gabler.
- Zimmermann, H. J. (2008). *Operations Research, Methoden und Modelle*. Wiesbaden: Vieweg Verlag.

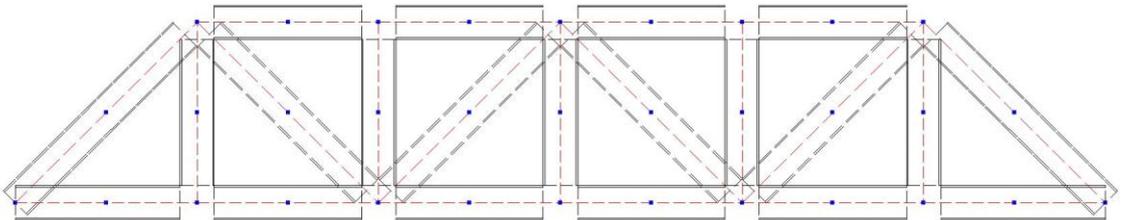
Anlage A: Ausfachungsarten

- **Nach Art des Stabgitters (Ausfachung)**

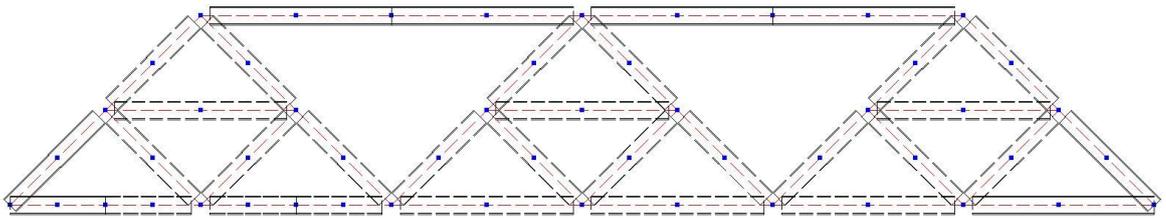
- Streben - Fachwerk



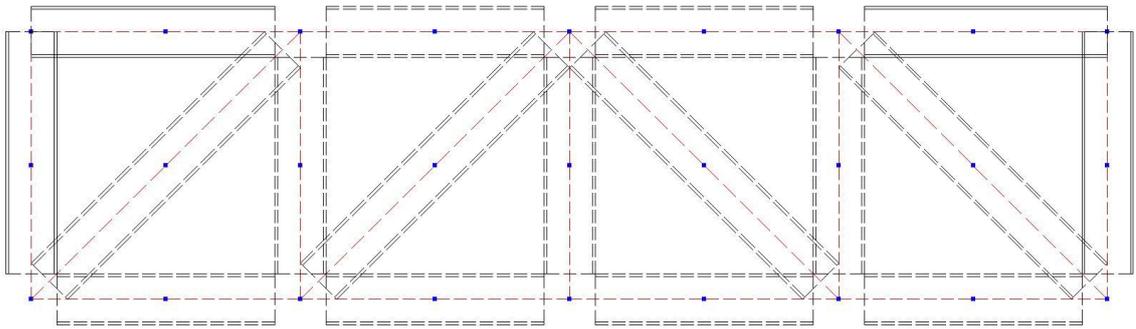
- Streben – Fachwerk mit Hilfspfosten



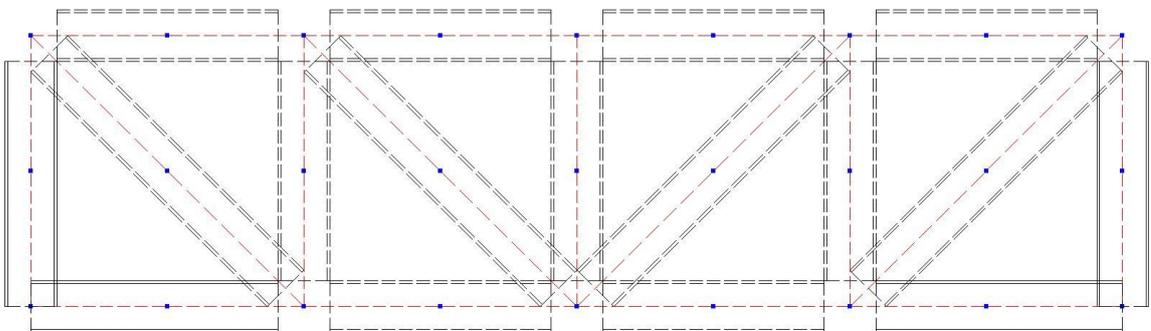
- Streben mit Sekundärfachwerken



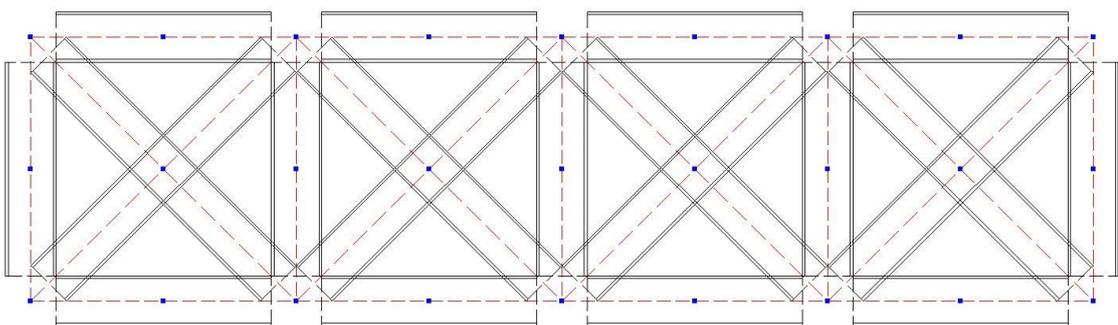
- Ständer – Fachwerk mit zur Mitte hin steigenden Diagonalen



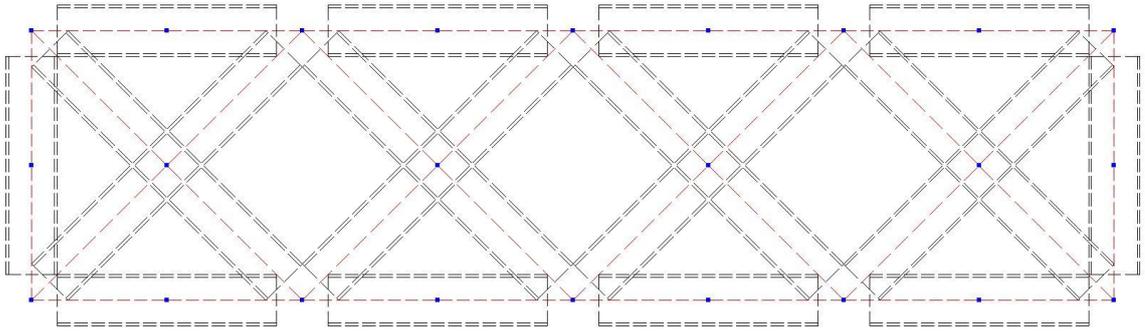
- Ständer – Fachwerk mit zur Mitte hin fallenden Diagonalen



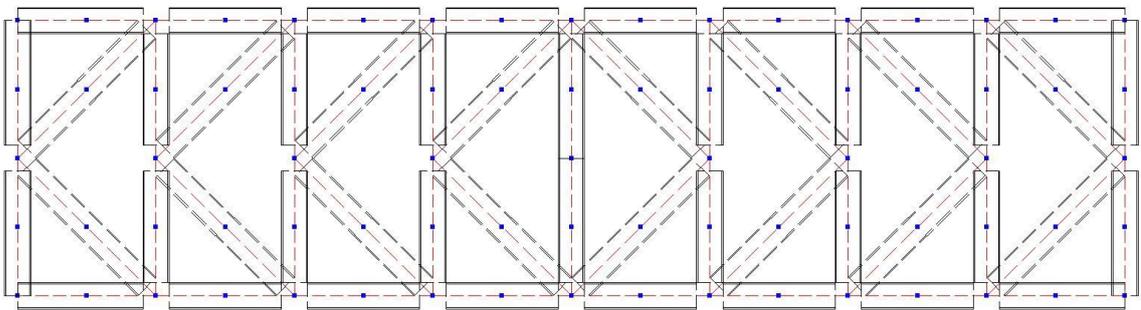
- Pfosten – Fachwerk mit gekreuzten Diagonalen



- Rauten – Fachwerk

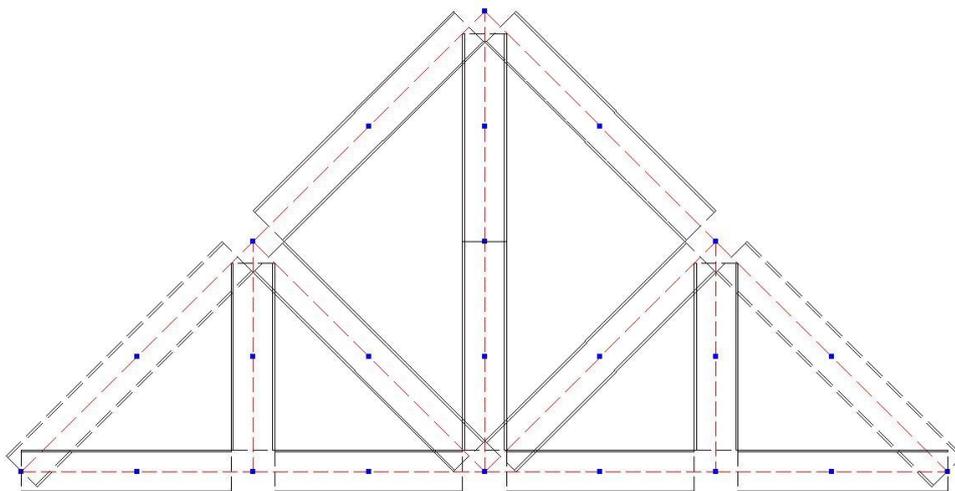


- K – Fachwerk

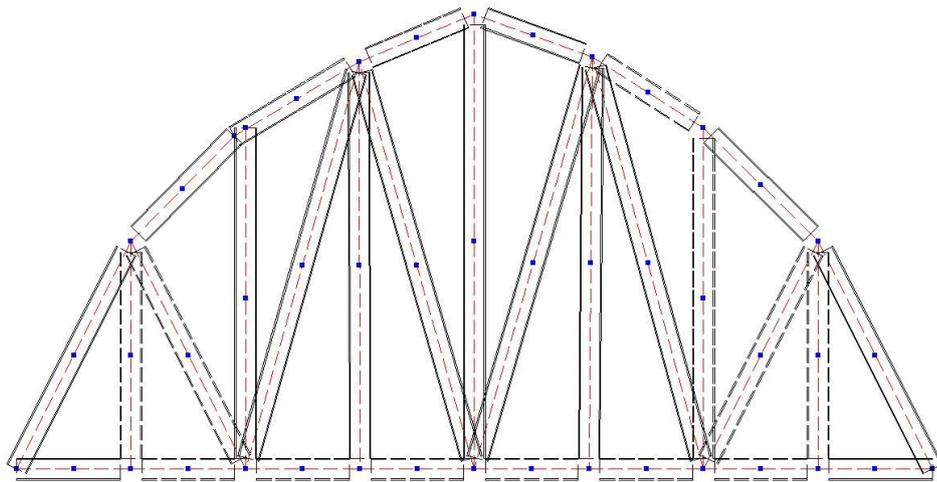


- **Nach Form der Gurtlinie**

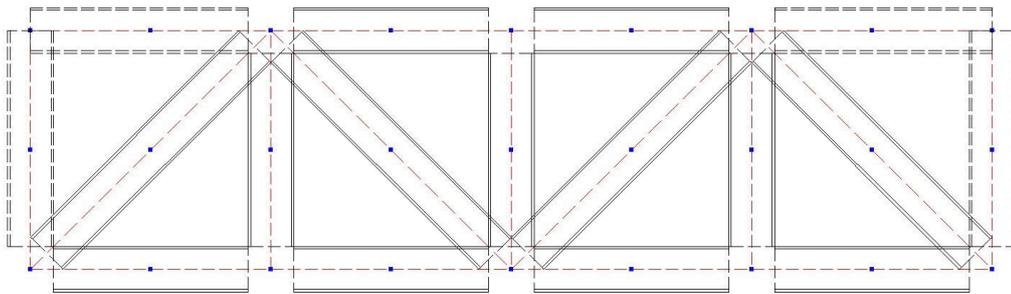
- Dreiecksfachwerk



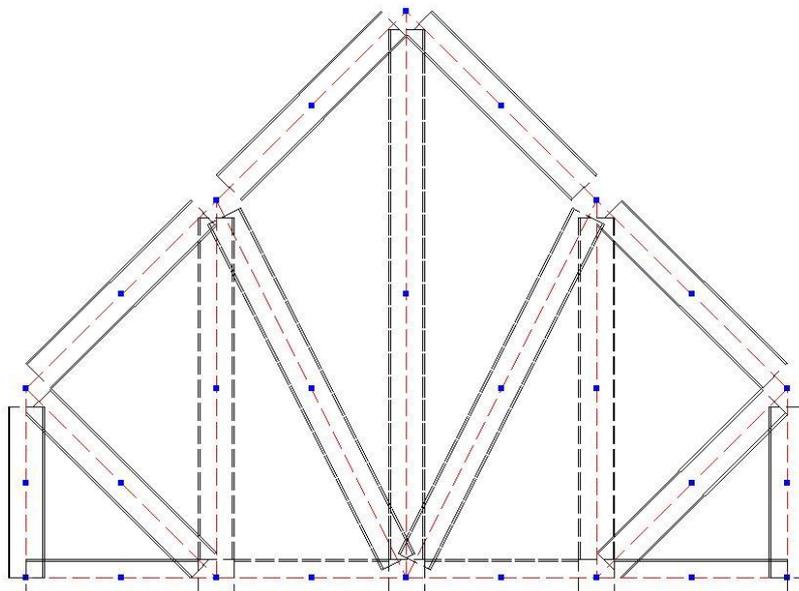
- Parabelfachwerk



- Parallelgurttuchwerk

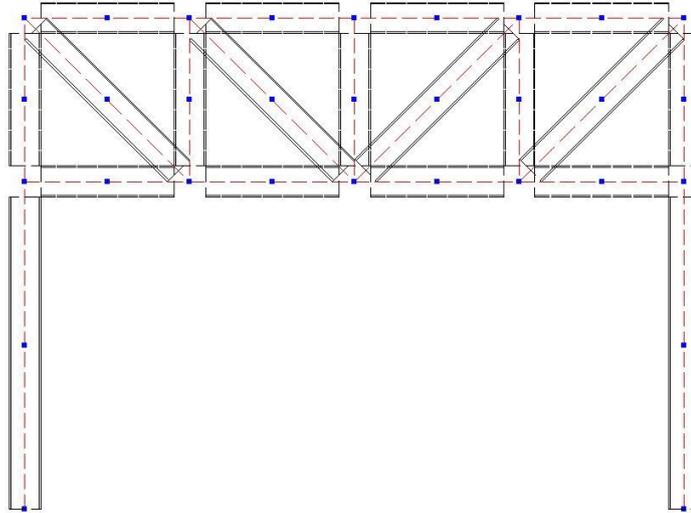


- Trapezfachwerk

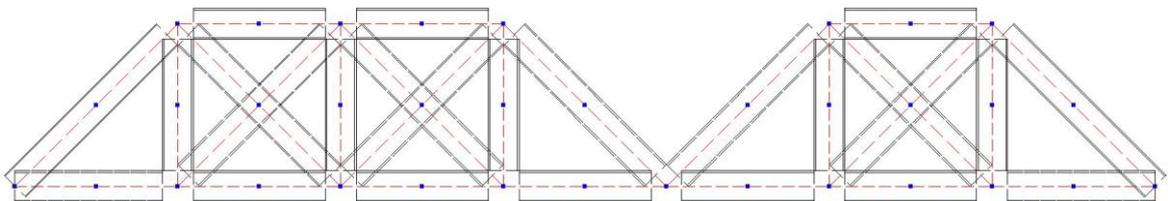


- **Nach Art des Tragsystems**

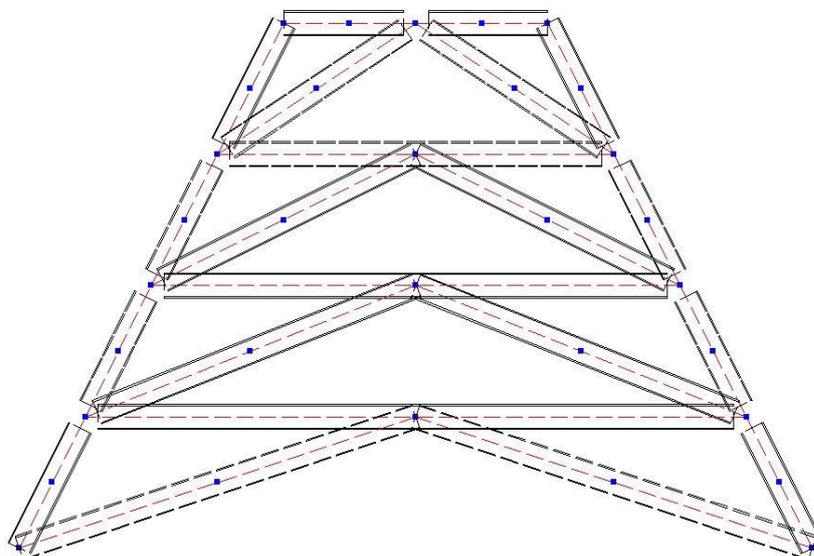
- Fachwerkbinder



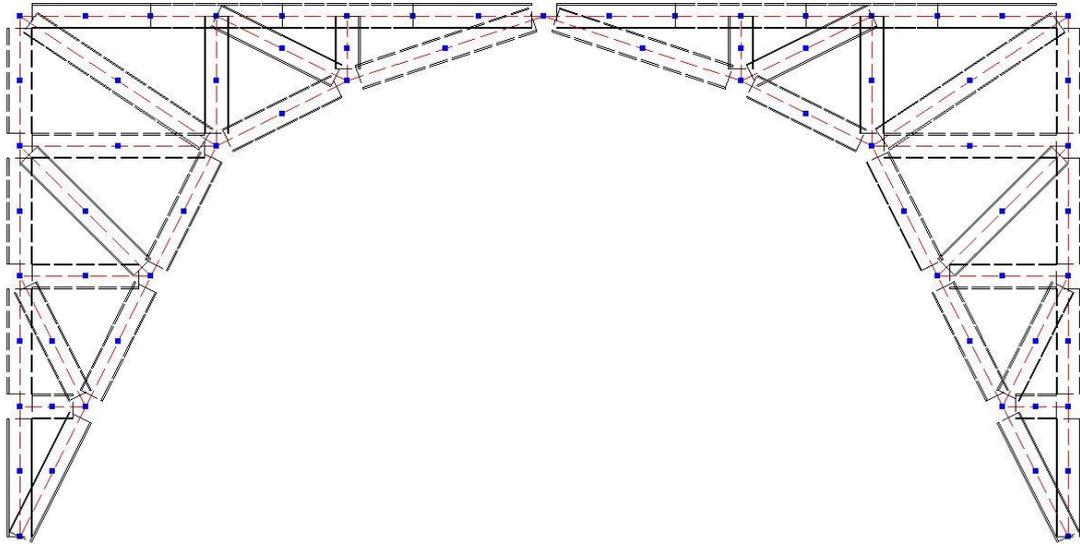
- Fachwerkbrückenträger



- Fachwerkmast



○ Fachwerkrahmen



Anlage B: Modellübersicht

Benötigte Variablen

Symbol	Definition
$s \in \{0,1\}^{ NTypes \times (m*n) \times (m*n)}$	$S_{k,i,j} = \begin{cases} 0, & \text{sonst} \\ 1, & \text{falls Stabart } k \text{ zwischen } i \text{ und } j \text{ verbaut ist} \end{cases}$
$F \in \mathbb{R}^{(m*n) \times (m*n)}$	$F_{i,j}$ = Kraftfluss von i nach j
$x \in \{0,1\}^{(m*n) \times (m*n)}$	$x_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{sonst} \\ 1, & \text{falls Stab zwischen } i \text{ und } j \text{ verbaut ist, indem Kraft vorliegt} \end{cases}$
$y \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Binärvariable, die anzeigt, ob ein Stab am Knoten anliegt
$l_i^0 \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Hilfsvariable, die anzeigt, ob an Knoten i eine durchgehende Stablinie der Art 1 verbaut ist
$l_i^1 \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Hilfsvariable, die anzeigt, ob an Knoten i eine durchgehende Stablinie der Art 2 verbaut ist
$l_i^2 \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Hilfsvariable, die anzeigt, ob an Knoten i eine durchgehende Stablinie der Art 3 verbaut ist
$l_i^3 \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Hilfsvariable, die anzeigt, ob an Knoten i eine durchgehende Stablinie der Art 4 verbaut ist
$L \in \{0,1\}^{(m*n)}$	Binärvariable, die anzeigt, ob ein Nullstab beliebiger Art anliegt
$Va \in \mathbb{R}$	Vertikale Reaktionskraft in Lager A
$Vb \in \mathbb{R}$	Vertikale Reaktionskraft in Lager B

Benötigte Mengen und Parameter

Symbol	Definition
$NTypes$	Menge der Stabtypen $\{0,1,2,\dots\}$
NQ	Menge der Quellkräfte $\{0,1,2,\dots\}$
$Knoten$	Menge der Knoten $\{1,\dots,m*n\}$
$m \in \mathbb{N}$	Breite der Matrix
$n \in \mathbb{N}$	Höhe der Matrix
$w \in \mathbb{R}$	Winkelfunktion $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$c \in \mathbb{R}^{ NTypes }$	$c(NTypes)$ = Kapazität des Stabtyps
$cost \in \mathbb{R}^{ NTypes }$	$cost(NTypes)$ = Kosten des Stabtyps
$Q \in \mathbb{R}^{ NQ }$	$Q(NQ)$ = Quellkraft der Quellkraftnummer
$QLoc \in \mathbb{N}^{ NQ }$	$QLoc(NQ)$ = Koordinate der Quellkraft
$M \in \mathbb{R}$	Big M - entspricht mindestens der maximalen Kapazität eines Stabes

Zielfunktion:

$$\min \sum_{i \in \text{Knoten}} \sum_{j \in \text{Knoten}} \sum_{k \in \text{NTypes}} S_{k,i,j} * \text{cost}_k$$

s.t

Lagerkraft A:

$$- \sum_{i \in \text{NQ}} Q_i * QLoc_{i-1} * Sl + Vb * (m - 1) * Sl = 0 \quad \forall i \in \text{Knoten}$$

Lagerkraft B:

$$\sum_{i \in \text{NQ}} Q_i * (m - QLoc_i) * Sl - Va * (m - 1) * Sl = 0 \quad \forall i \in \text{Knoten}$$

Kraftfluss:

$$F_{i,j} \leq M * x_{i,j} \quad \forall i, j \in \text{Knoten}$$

Drittes newtonsche Axiom:

$$F_{i,j} = -F_{j,i} \quad \forall i, j \in \text{Knoten}$$

Krafteinleitung:

$$-F_{QLoc(i),QLoc(i)+m} - w * F_{QLoc(i),QLoc(i)+m-1} - w * F_{QLoc(i),QLoc(i)+m+1} - Q_i = 0 \quad \forall i \in \text{NQ} \mid QLoc_i \neq 1$$

$$\wedge QLoc_i \neq m$$

$$-F_{QLoc(i),QLoc(i)+m} - w * F_{QLoc(i),QLoc(i)+m+1} - Q_i = 0 \quad \forall i \in \text{NQ} \mid QLoc_i = 1$$

$$-F_{QLoc(i),QLoc(i)+m} - w * F_{QLoc(i),QLoc(i)+m-1} - Q_i = 0 \quad \forall i \in \text{NQ} \mid QLoc_i = m$$

Kapazitätsbeschränkung:

$$F_{i,j} \leq \sum_{k \in \text{NTypes}} c_k * S_{k,i,j} \quad \forall i, j \in \text{Knoten}$$

$$\sum_{k \in \text{NTypes}} S_{k,i,j} = x_{i,j} \quad \forall i, j \in \text{Knoten}$$

$$S_{k,i,j} = S_{k,j,i} \quad \forall i, j \in \text{Knoten}$$

$$\wedge k \in \text{NTypes}$$

$$x_{i,j} = x_{j,i} \quad \forall i, j \in \text{Knoten}$$

GGB – Sonderfall 9:

$$-F_{i,i-1} + F_{i,i+1} + w * F_{i,i-m+1} - w * F_{i,i-m-1} - w * F_{i,i+m-1} + w * F_{i,i+m+1} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m + 2$$

$$\wedge i \leq (m * n) - m - 1$$

$$\wedge i \bmod m \neq 0, i \bmod m \neq 1$$

$$+F_{i,i-m} - F_{i,i+m} + w * F_{i,i-m+1} - w * F_{i,i-m-1} - w * F_{i,i+m-1} + w * F_{i,i+m+1} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m + 2$$

$$\wedge i \leq (m * n) - m - 1$$

$$\wedge i \bmod m \neq 0$$

$$\wedge i \bmod m \neq 1$$

GGB – Sonderfälle 1-8:

$$F_{i,i+1} + w * F_{i,i+m+1} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = 1$$

$$-F_{i,i+m} - w * F_{i,i+m+1} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = 1$$

$$\wedge (k \in NQ \mid QLoc_k \neq 1)$$

$$-F_{i,i-1} - w * F_{i,i-m-1} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = m * n$$

$$+F_{i,i-m} + w * F_{i,i-m-1} + Vb = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = m * n$$

$$-F_{i,i-1} - w * F_{i,i-m-1} - w * F_{i,i+m-1} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 0$$

$$\wedge i \geq 2m$$

$$\wedge i \leq n * m - m$$

$$+F_{i,i-m} - F_{i,i+m} + w * F_{i,i-m-1} - w * F_{i,i+m-1} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 0$$

$$\wedge i \geq 2m$$

$$\wedge i \leq n * m - m$$

$$+F_{i,i+1} + w * F_{i,i-m+1} + w * F_{i,i+1+m} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 1$$

$$\wedge i \geq m + 1$$

$$\wedge i \leq n * m - m$$

$$+F_{i,i-m} - F_{i,i+m} + w * F_{i,i-m+1} - w * F_{i,i+1+m} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 1$$

$$\wedge i \geq m + 1$$

$$\wedge i \leq n * m - m$$

$$-F_{i,i-1} - w * F_{i,i+m-1} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = m$$

$$-F_{i,i+m} - w * F_{i,i+m-1} = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = m$$

$$\wedge (k \in NQ \mid QLoc_k \neq m)$$

$F_{i,i+1} + w * F_{i,i-m+1} = 0$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = m * n - m + 1$
$F_{i,i-m} + w * F_{i,i-m+1} + Va = 0$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = m * n - m + 1$
$F_{i,i-1} + F_{i,i+1} - w * F_{i,i+m-1} + w * F_{i,i+m+1} = 0$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq 2$ $\wedge i \leq m - 1$
$-F_{i,i+m} - w * F_{i,i+m-1} - w * F_{i,i+1+m} = 0$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq 2$ $\wedge i \leq m - 1$ $\wedge (k \in NQ \mid QLoc_k \neq i)$
$-F_{i,i-1} + F_{i,i+1} - w * F_{i,i-m-1} + w * F_{i,i-m+1} = 0$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m * n - m + 2$ $\wedge i \leq m * n - 1$
$-F_{i,i-m} + w * F_{i,i-m-1} + w * F_{i,i-m+1} = 0$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m * n - m + 2$ $\wedge i \leq m * n - 1$

Nullstäbe:

Nullstab – Fall 1:

$x_{i,i+1} + x_{i,i-1} \leq l_i^0 + 1$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m \neq 0$ $\wedge i \bmod m \neq 1$
$x_{i,i+1} + x_{i,i-1} \geq 2 * l_i^0$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m \neq 0$ $\wedge i \bmod m \neq 1$
$l_i^0 = 0$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 0$ $\vee i \bmod m = 1$

Nullstab – Fall 2:

$x_{i,i+m} + x_{i,i-m} \leq l_i^1 + 1$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m + 1$ $\wedge i \leq m * n - m$
$x_{i,i+m} + x_{i,i-m} \geq 2 * l_i^1$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m + 1$ $\wedge i \leq m * n - m$
$l_i^1 = 0$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \leq m + 1$ $\vee i \geq m * n - m$

Nullstab – Fall 3:

$x_{i,i-m+1} + x_{i,i+m-1} \leq l_i^2 + 1$	$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m$ $\vee i \leq m * n - m$ $\vee i \bmod m \neq 1$ $\vee i \bmod m \neq 0$
--------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$x_{i,i-m+1} + x_{i,i+m-1} \geq 2 * l_i^2$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m$$

$$\forall i \leq m * n - m$$

$$\forall i \bmod m \neq 1$$

$$\forall i \bmod m \neq 0$$

$$l_i^2 = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i < m$$

$$\forall i > m * n - m$$

$$\forall i \bmod m = 1$$

$$\forall i \bmod m = 0$$

Nullstab – Fall 4:

$$x_{i,i+m+1} + x_{i,i-m-1} \leq l_i^3 + 1$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m$$

$$\forall i \leq m * n - m$$

$$\forall i \bmod m \neq 1$$

$$\forall i \bmod m \neq 0$$

$$x_{i,i+m+1} + x_{i,i-m-1} \geq 2 * l_i^3$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m$$

$$\forall i \leq m * n - m$$

$$\forall i \bmod m \neq 1$$

$$\forall i \bmod m \neq 0$$

$$l_i^3 = 0$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i < m$$

$$\forall i > m * n - m$$

$$\forall i \bmod m = 1$$

$$\forall i \bmod m = 0$$

Nullstab – Forderung allgemein:

$$\sum_{z=0}^3 l_i^z \leq 4 * L_i$$

$$\forall i \in \text{Knoten}$$

$$x_{i,i-m-1} + x_{i,i-m} + x_{i,i-m+1} + x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i+m} + x_{i,i+m+1} \geq 3 * L_i$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m + 2$$

$$\forall i \leq m * n - m - 1$$

$$\forall i \bmod m \neq 0$$

$$\forall i \bmod m \neq 1$$

Nullstab – Forderung an Randfällen:

$$x_{i,i-1} + x_{i,i-m-1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i-m} + x_{i,i+m} \geq 3 * L_i$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 0$$

$$\forall i \geq 2m$$

$$\forall i \leq n * m - m$$

$$x_{i,i+1} + x_{i,i-m+1} + x_{i,i+m+1} + x_{i,i+m} \geq 3 * L_i \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 1$$

$$\forall i \geq m + 1$$

$$\forall i \leq n * m - m$$

$$x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i+m} + x_{i,i+m+1} \geq 3 * L_i \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq 2$$

$$\forall i \leq m - 1$$

Nullstab – Kraftweiterleitung zum Lager:

$$x_{i,i+1} + x_{i,i+m} + x_{i,i+m+1} \leq 8 * y_i \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i = 1$$

$$2 * y_i \leq x_{i,i+1} + x_{i,i+m} + x_{i,i+m+1} \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i = 1$$

$$x_{i,i-1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i+m} \leq 8 * y_i \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i = m$$

$$2 * y_i \leq x_{i,i-1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i+m} \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i = m$$

$$x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i+m} + x_{i,i+m+1} \leq 8 * y_i \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq 2$$

$$\forall i \leq m - 1$$

$$2 * y_i \leq x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i+m} + x_{i,i+m+1} \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq 2$$

$$\forall i \leq m - 1$$

$$x_{i,i-1} + x_{i,i-m-1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i-m} + x_{i,i+m} \leq 8 * y_i \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 0$$

$$\forall i \geq 2 * m$$

$$\forall i \leq n * m - m$$

$$2 * y_i \leq x_{i,i-1} + x_{i,i-m-1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i-m} + x_{i,i+m} \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 0$$

$$\forall i \geq 2 * m$$

$$\forall i \leq n * m - m$$

$$x_{i,i+1} + x_{i,i-m+1} + x_{i,i+m+1} + x_{i,i-m} + x_{i,i+m} \leq 8 * y_i \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 1$$

$$\forall i \geq m + 1$$

$$\forall i \leq n * m - m$$

$$2 * y_i \leq x_{i,i+1} + x_{i,i-m+1} + x_{i,i+m+1} + x_{i,i-m} + x_{i,i+m} \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \bmod m = 1$$

$$\forall i \geq m + 1$$

$$\forall i \leq n * m - m$$

$$x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + x_{i,i-m-1} + x_{i,i-m+1} + x_{i,i-m} \leq 8 * y_i \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m * n - m + 2$$

$$\forall i \leq m * n - 1$$

$$2 * y_i \leq x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + x_{i,i-m-1} + x_{i,i-m+1} + x_{i,i-m} \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m * n - m + 2$$

$$\forall i \leq m * n - 1$$

$$x_{i,i-m-1} + x_{i,i-m} + x_{i,i-m+1} + x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i+m} + x_{i,i+m+1} \leq 8 * y_i \quad \forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m + 2$$

$$\forall i \leq m * n - m - n$$

$$2 * y_i \leq x_{i,i-m-1} + x_{i,i-m} + x_{i,i-m+1} + x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + x_{i,i+m-1} + x_{i,i+m} + x_{i,i+m+1}$$

$$\forall i \bmod m \neq 0$$

$$\forall i \bmod m \neq 1$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \geq m + 2$$

$$\forall i \leq m * n - m - n$$

$$\forall i \bmod m \neq 0$$

$$\forall i \bmod m \neq 1$$

Nullstab - Quellknoten:

$$x_{QLoc_i,QLoc_{i+1}} + x_{QLoc_i,QLoc_{i+m}} + x_{QLoc_i,QLoc_{i+m+1}} \geq 2$$

$$\forall i \in NQ \mid QLoc_i = 1$$

$$x_{QLoc_i,QLoc_{i-1}} + x_{QLoc_i,QLoc_{i+1}} + x_{QLoc_i,QLoc_{i+m-1}} + x_{QLoc_i,QLoc_{i+m}} + x_{QLoc_i,QLoc_{i+m+1}} \geq 2$$

$$\forall i \in NQ \mid QLoc_i \neq 1$$

$$\forall QLoc_i \neq m$$

$$x_{QLoc_i,QLoc_{i-1}} + x_{QLoc_i,QLoc_{i+m-1}} + x_{QLoc_i,QLoc_{i+m}} \geq 2$$

$$\forall i \in NQ \mid QLoc_i = m$$

Nullstab – Senkknoten:

$$x_{i,i-1} + x_{i,i-m-1} + x_{i,i-m} \geq 1$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = m * n$$

$$x_{i,i+1} + x_{i,i-m} + x_{i,i-m+1} \geq 1$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i = m * n - m + 1$$

Forderung – Fahrbahn:

$$\sum_1^m x_{i,i+1} = m - 1$$

$$\forall i \in \text{Knoten} \mid i \leq m$$

Anlage C :Flussnetzwerk

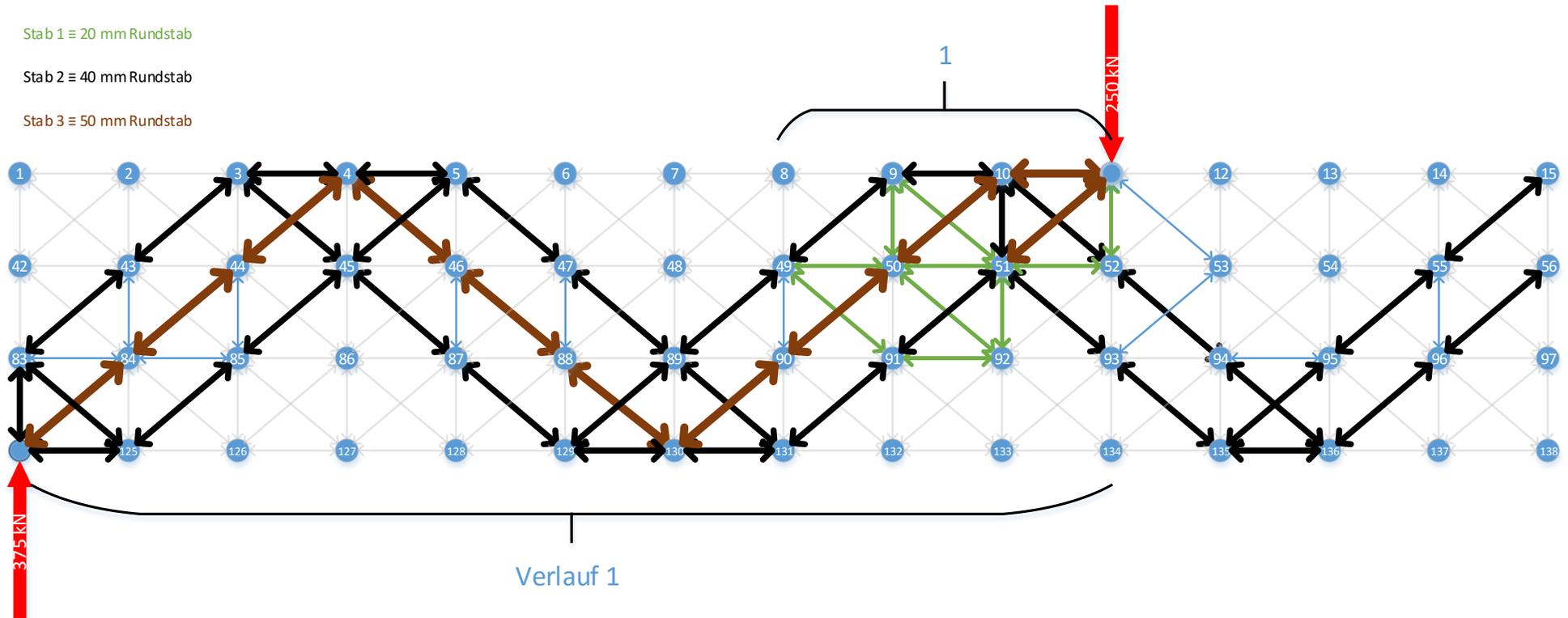
- Instanz 1

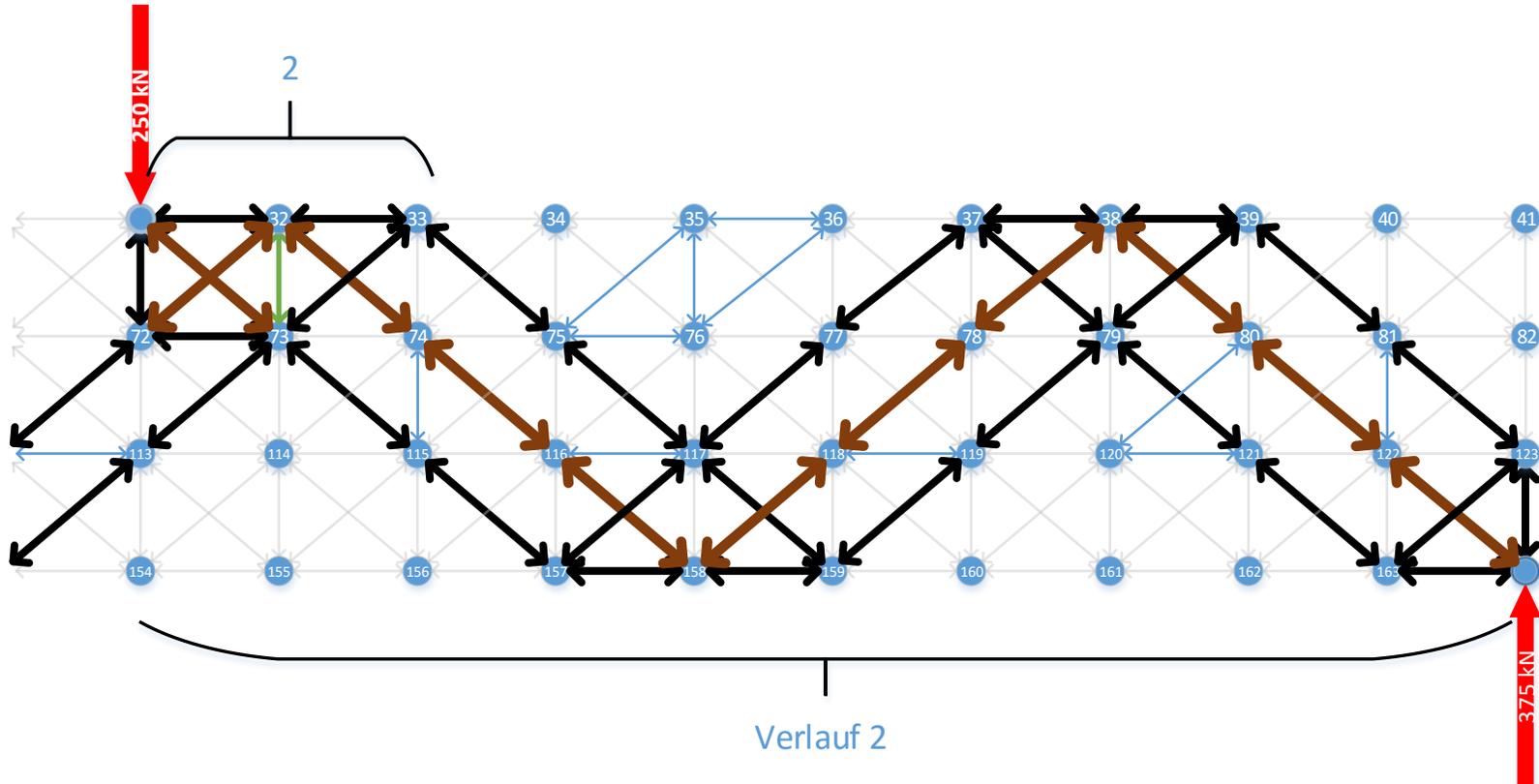
Stab 0 ≙ 4 mm Rundstab

Stab 1 ≙ 20 mm Rundstab

Stab 2 ≙ 40 mm Rundstab

Stab 3 ≙ 50 mm Rundstab





- **Instanz 2**

Stab 0 \equiv 4 mm Rundstab

Stab 1 \equiv 20 mm Rundstab

Stab 2 \equiv 40 mm Rundstab

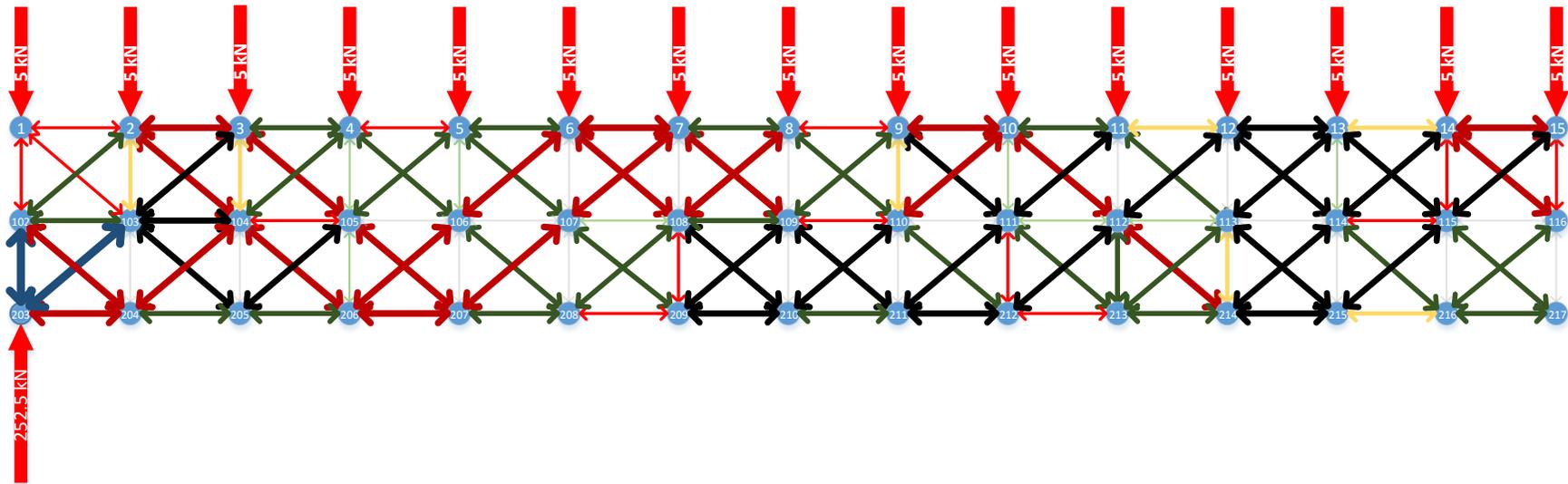
Stab 3 \equiv 50 mm Rundstab

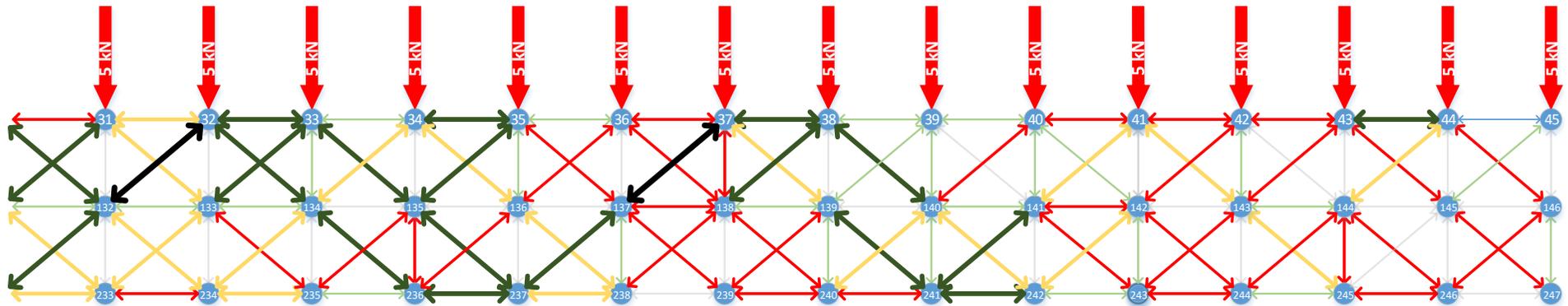
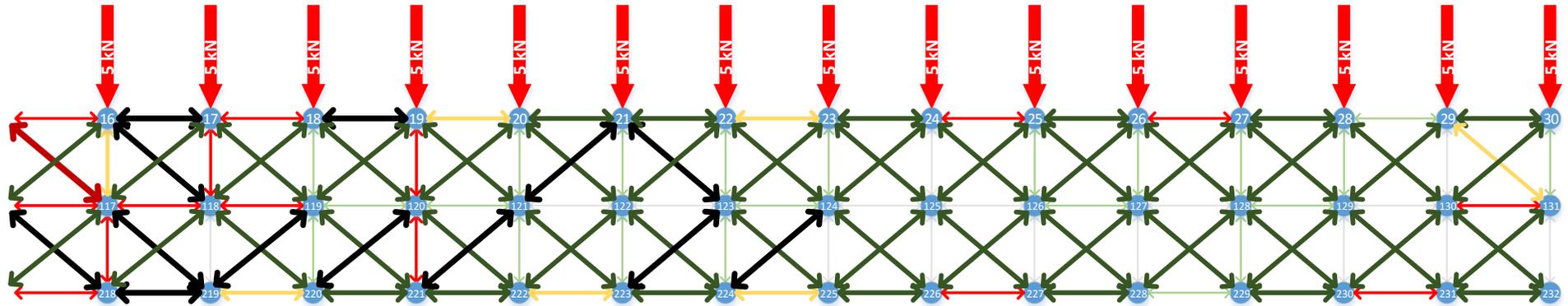
Stab 4 \equiv 65 mm Rundstab

Stab 5 \equiv 80 mm Rundstab

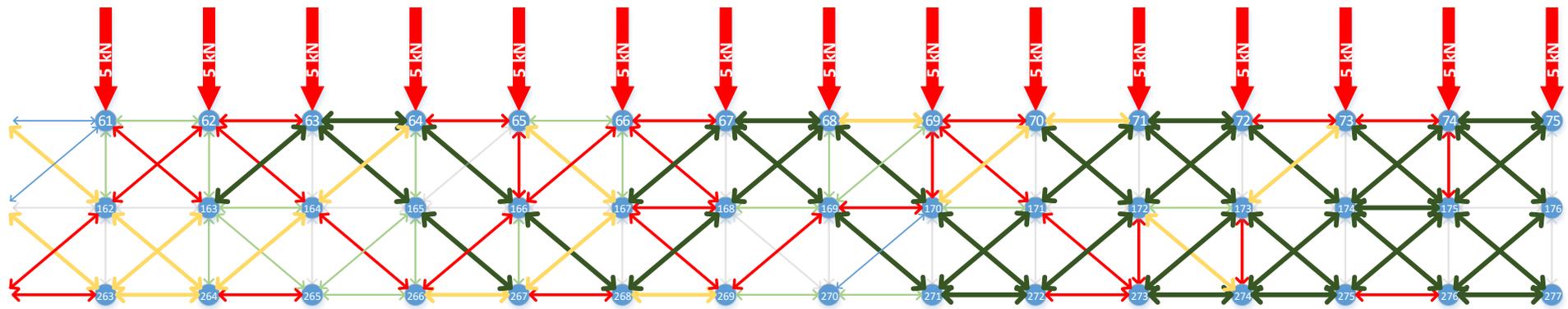
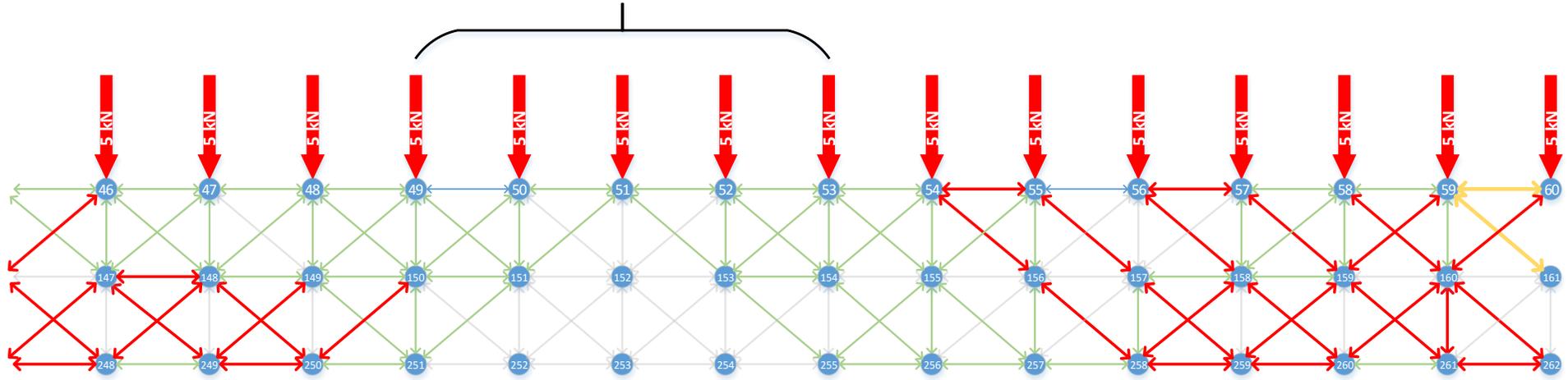
Stab 6 \equiv 100 mm Rundstab

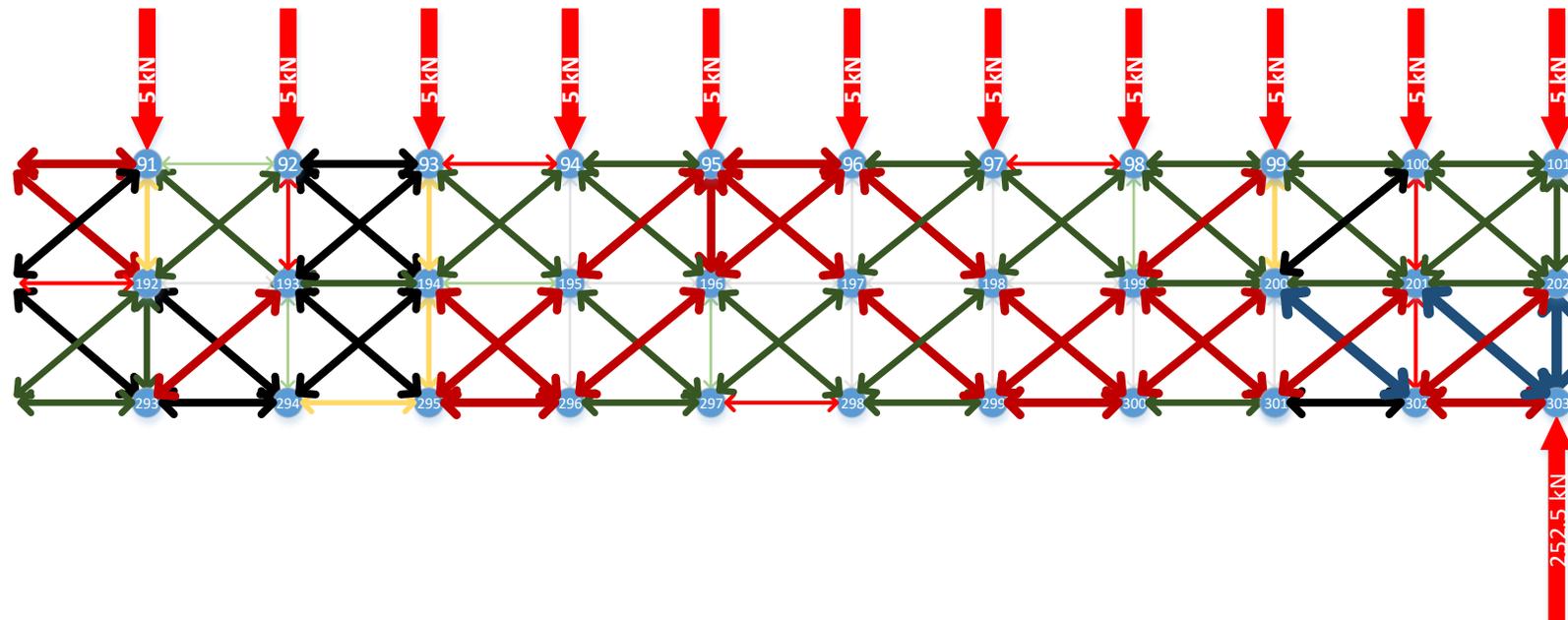
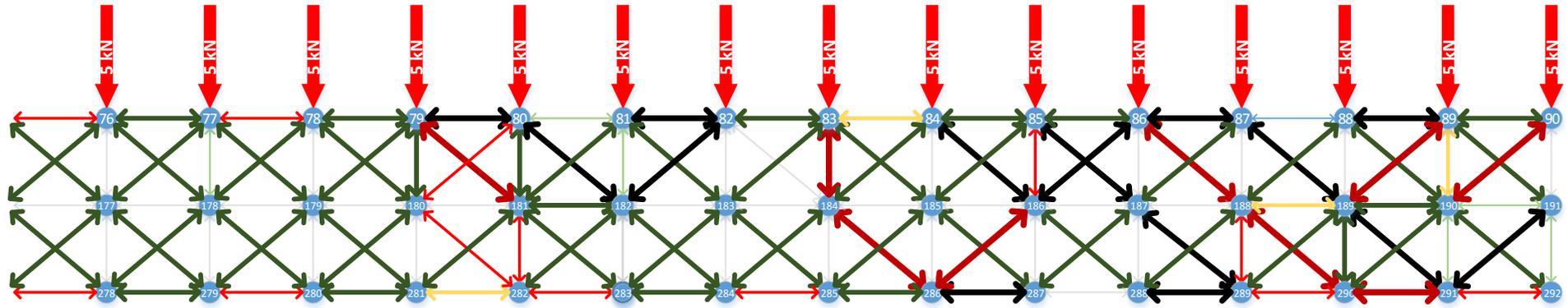
Stab 7 \equiv 120 mm Rundstab





Merkmals Auslagerbrücke





Eidesstattliche Erklärung

„Ich versichere, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt, nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt, alle benutzten Quellen und Hilfsmittel angegeben sowie wörtliche und sinn-gemäße Zitate gekennzeichnet habe.“

Ort, Datum

Unterschrift