

Dipl.-Kfm. Sascha Steinmann
Universität Siegen
Lehrstuhl für Marketing
steinmann@marketing.uni-siegen.de

Sommersemester 2010

Marktforschung

Übungsaufgabe zur Multidimensionalen Skalierung (MDS):**Aufgabe 1:**

Gegeben sei folgende Matrix der Ähnlichkeiten von fünf Objekten:

$$X = \begin{pmatrix} - & & & & \\ 4 & - & & & \\ 3 & 5 & - & & \\ 6 & 7,2 & 3 & - & \\ 7,2 & 6 & 5 & 4 & - \end{pmatrix}$$

Die vorliegenden Ähnlichkeitsbeziehungen sollen in einen zweidimensionalen orthogonalen Wahrnehmungsraum abgebildet werden. Als Startkonfiguration sind folgende Koordinaten zufällig ermittelt worden:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ -2 & 3 \\ -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Zeichnen Sie die Startkonfiguration und versuchen Sie, diese zu beurteilen!
2. Berechnen Sie die Euklidischen Distanzen (auf zwei Nachkommastellen genau) und zeichnen Sie das mit der Startkonfiguration korrespondierende Shepard-Diagramm!
3. Berechnen Sie die Disparitäten und zeichnen Sie das neue Shepard Diagramm?

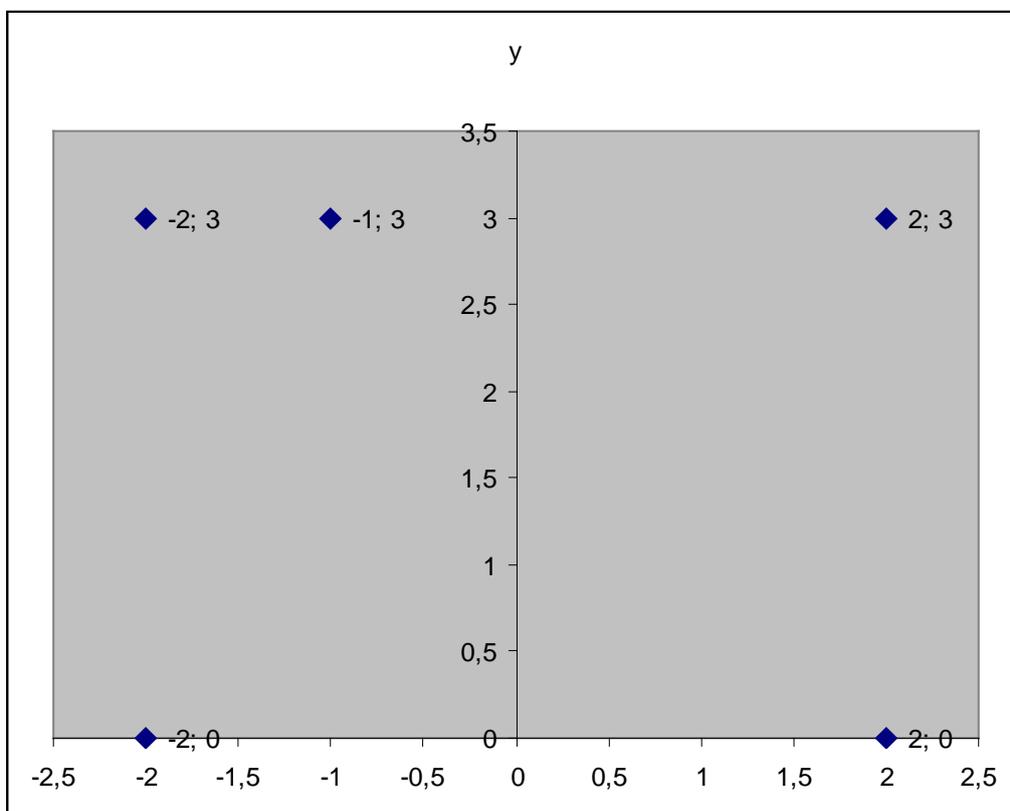
Hinweise:

Minkowski-Metrik:
$$d_{kl} = \left[\sum_{r=1}^R |x_{kr} - x_{lr}|^c \right]^{1/c}$$

Disparitäten:
$$\hat{d}_{kl} = \hat{d}_{ij} = \frac{d_{kl} + d_{ij}}{2}$$

Lösungsskizze:

1. Startkonfiguration:



	x	Y
Objekt 1	2	3
Objekt 2	2	0
Objekt 3	-2	3
Objekt 4	-1	3
Objekt 5	-2	0

Beispiel Beurteilung:

Objekt 1 und Objekt 3 sind laut der Ähnlichkeitsmatrix das ähnlichste Paar (Ähnlichkeit 3) (neben den Objekten 4 und 3). Nach der Monotoniebedingung der MDS (Wenn $u_{kl} > u_{ij}$, dann $d_{kl} > d_{ij}$) muss sich dies auch in den Distanzen in der Konfiguration widerspiegeln. In der Grafik der Startkonfiguration sieht man jedoch, dass die Distanz zwischen Objekt 1 und Objekt 4 geringer ist (Ähnlichkeit 6).

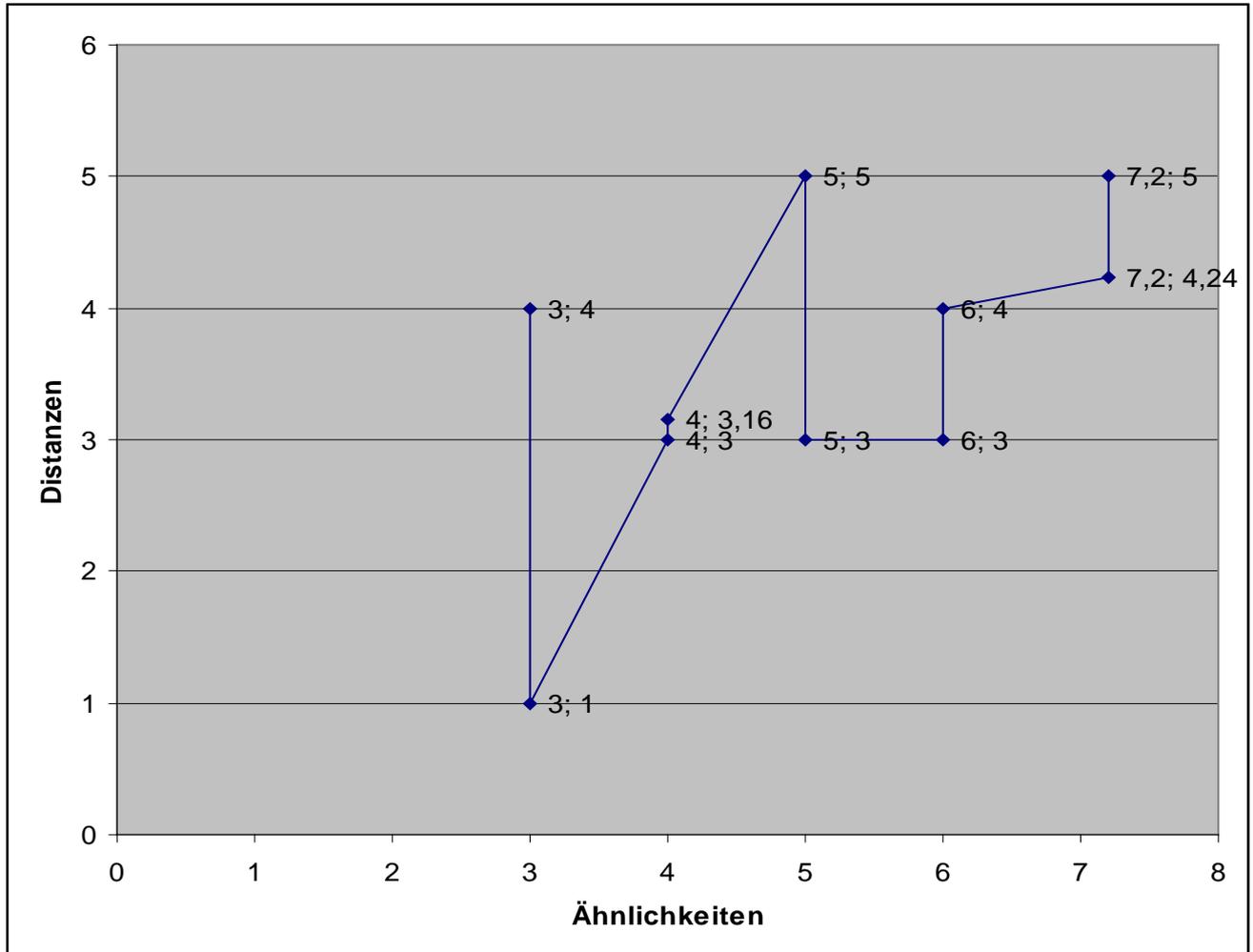
2. Distanzmatrix: Ergebnis für die euklidische Distanz

$$d = \begin{pmatrix} - & & & & & \\ 3,00 & - & & & & \\ 4,00 & 5,00 & - & & & \\ 3,00 & 4,24 & 1,00 & - & & \\ 5,00 & 4,00 & 3,00 & 3,16 & - & \end{pmatrix}$$

Objektpaar	U Ähnlichkeiten	Distanzen
3-1	3	4,00
4-3	3	1,00
2-1	4	3,00
5-4	4	3,16
3-2	5	5,00
5-3	5	3,00
4-1	6	3,00
5-2	6	4,00
4-2	7,2	4,24
5-1	7,2	5,00

Wie man in der Gegenüberstellung der Ähnlichkeiten und Distanzen sieht, sind in diesem Beispiel so genannte „Ties“ gegeben, d.h. einem Ähnlichkeitsrang sind zwei Distanzen zugeordnet. Die sieht man auch im folgenden Shepard Diagramm:

Shepard Diagramm:



Das Shepard Diagramm ist einfach mit den „Ties“ zu zeichnen!

3. Disparitäten

Für die Berechnung der Disparitäten macht es Sinn sich die Distanzen in Form der Monotoniebedingung (s. Folien) aufzuschreiben:

Sequenz der Distanzen: $4 < 1 < 3 < 3,16 < 5 < 3 < 3 < 4 < 4,24 < 5$

Nun kann man sehen an welcher Stelle die Monotoniebedingung verletzt ist und kann diese durch die Berechnung der entsprechenden Disparitäten herstellen. Man geht nun die Distanzsequenz von links nach rechts durch und mittelt die Beobachtungen in jedem **Block**, in dem die Monotoniebedingung verletzt ist.

In der Vorlesung wurde dies für jeweils zwei Werte durchgeführt (vgl. Folie 27):

$$\hat{d}_{kl} = \hat{d}_{ij} = \frac{d_{kl} + d_{ij}}{2}$$

Es ist aber auch möglich und notwendig die Disparitäten als Mittel aus mehr als zwei Werten zu berechnen.

Erste Verletzung: $4 < 1 < 3 < 3,16 < 5 < 3 < 3 < 4 < 4,24 < 5$



Bei 4 und 1. Nun Mittelwertbildung:

$$\hat{d}_{3-4} = \hat{d}_{3-1} = \frac{4+1}{2} = 2,5$$

Zweite Verletzung : $4 < 1 < 3 < 3,16 < 5 < 3 < 3 < 4 < 4,24 < 5$



Bei 5, 3 und 3. Beim nächsten Wert ist die Monotoniebedingung wieder erfüllt (von 3 auf 4). In diesem Fall also der Mittelwert aus drei Werten.

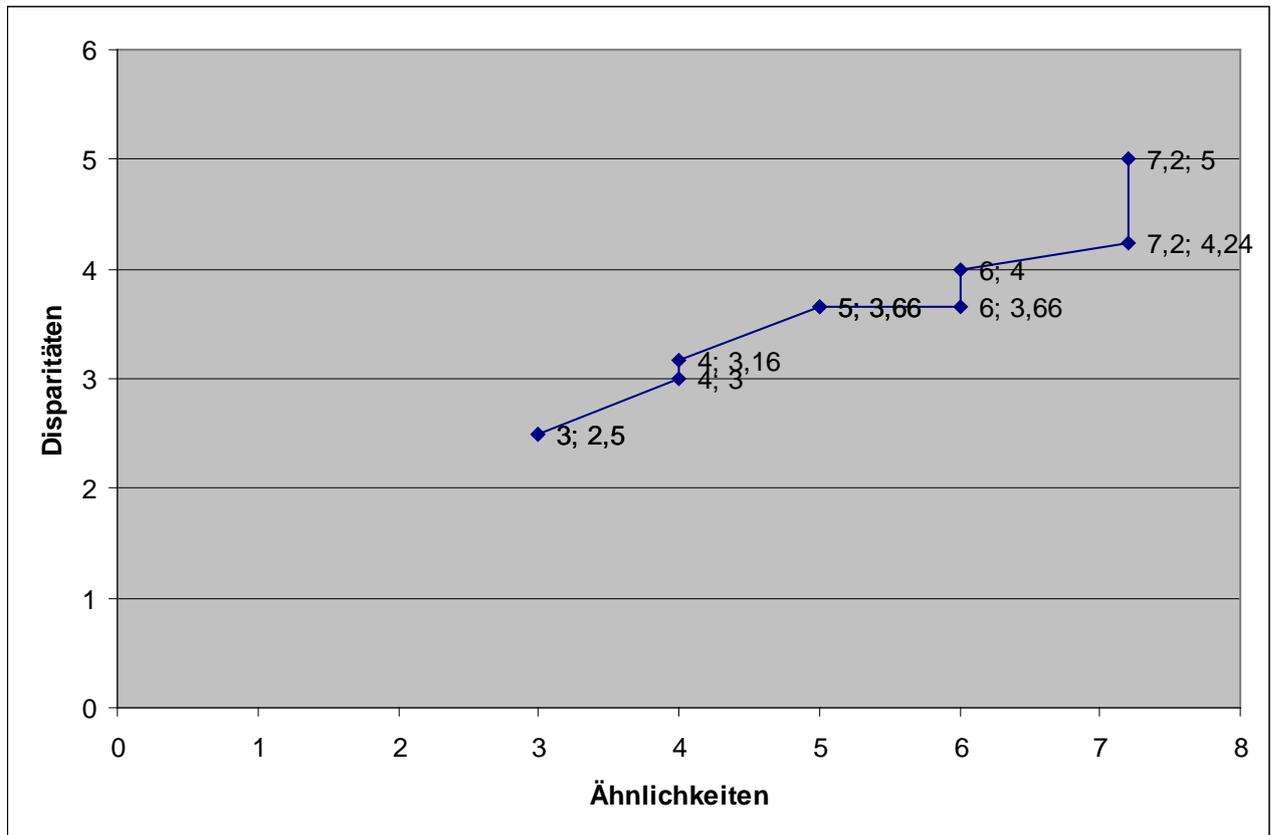
$$\frac{5+3+3}{3} = 3,66$$

Nun wäre die Monotoniebedingung über alle Distanzen / Disparitäten erfüllt:

$2,5 < 2,5 < 3 < 3,16 < 3,66 < 3,66 < 3,66 < 4 < 4,24 < 5$

Objektpaar	Ähnlichkeiten	Distanzen	Disparitäten
3-1	3	4,00	2,50
4-3	3	1,00	2,50
2-1	4	3,00	3,00
5-4	4	3,16	3,16
3-2	5	5,00	3,66
5-3	5	3,00	3,66
4-1	6	3,00	3,66
5-2	6	4,00	4,00
4-2	7,2	4,24	4,24
5-1	7,2	5,00	5,00

Neues Shepard Diagramm mit Disparitäten:



Bei den Ähnlichkeitsrängen 3 und 5 liegen nun zwei Punkte mit derselben Distanz.

Aufgabe gelöst.