UNIVERSITÄT SIEGEN

Fachbereich 5
Lehrstuhl für Marketing
Univ.-Professor Dr. Hanna Schramm-Klein

Sommersemester 2010

Marktforschung

Übungsaufgabe zur Faktoranalyse:

Aufgabe 1:

Ein Gastwirt möchte aufgrund sinkender Umsätze das Image seines Speiselokals im Vergleich zu drei anderen Restaurants in seiner Stadt überprüfen (k = 1,…, 4 Objekte). Das Marktforschungsteam „Spass mit SPSS", das der Gastwirt mit der Imageanalyse beauftragt hat, findet in einem Pretest heraus, dass die Variablen Qualität (j = 1) und Atmosphäre (j = 2) hoch relevante Entscheidungskriterien bezüglich der Restaurantwahl darstellen. Daher werden diese beiden Merkmale in einen Fragebogen aufgenommen und von einer zweiten repräsentativen Stichprobe bezüglich der vier Restaurants bewertet. Dies geschieht anhand einer nach oben offenen Skala, bei der die Befragten die Ausprägung der Variablen subjektiv mit Zahlenwerten bewerteten. Je höher der angegebene Zahlenwert, desto besser wurde die entsprechende Variable bei einem einzelnen Restaurant bewertet. Die auf diese Weise erhobenen numerischen Daten sollen nun mit einer Faktorenanalyse verdichtet werden.

Da K = 4 Objekte bzw. Speiselokale gleichzeitig betrachtet werden, lassen sich die – hier nicht angegebenen – Messwerte auf Variablenebene zu folgender Mittelwertmatrix *X* aggregieren.

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 & 6 \\ 8 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Eine Beobachtung x_{jk} der Matrix *X* entspricht somit den über alle befragten gemittelten Einstellungswert gegenüber Restaurant *k* unter Betrachtung von Merkmal *j*.

a) Bestimmen Sie hiervon ausgehend die Korrelationmatrix R.
b) Wie lautet die zugehörige Faktorladungsmatrix A und die Faktorwertematrix P? Gehen Sie bei Ihren Berechnungen davon aus eine Hauptkomponentenanalyse durchzuführen.
c) Stellen Sie die Objekte bezüglich Ihrer Merkmalsausprägungen (X) und der Faktorwerte im zweidimensionalen Raum dar.

Bearbeitungshinweise:

$$Z = (z_{jk}) = \frac{x_{jk} - \bar{x}_j}{s_j}$$

$$R = \frac{1}{K-1} ZZ'$$

$$a_{jq} = \alpha_{jq} \frac{\sqrt{\lambda_q}}{\sqrt{\alpha_{1q}^2 + \alpha_{2q}^2 + \ldots + \alpha_{Jq}^2}} \forall j, q$$

$$P = A^{-1} \cdot Z$$

Lösungsskizze:

a) Grundlage der Datenverdichtung ist die Reduktion der Korrelationen zwischen den Variablen auf ein redundanzfreies Beziehungsgefüge. Daher beginnt die Faktorenanalyse mit der Aufstellung der Korrelationsmatrix R, welche leicht ermittelt werden kann, wenn man die Ausgangsdatenmatrix X wie folgt standardisiert.

$$\bar{x}_1 = 8; \quad \bar{x}_2 = 6$$

$$K = 4$$

$$s_1^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^{K} (x_{1k} - \bar{x}_1)^2 = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8$$

$$s_2^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^{K} (x_{2k} - \bar{x}_2)^2 = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8$$

$$Z = (z_{jk}) = \frac{x_{jk} - \bar{x}_j}{s_j}$$

$$Z = \begin{pmatrix} -0{,}7071 & 0 & 1{,}4142 & -0{,}7071 \\ 0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 & -1{,}4142 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Korrelationmatrix R:

$$R = \frac{1}{K-1} ZZ'$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -0{,}7071 & 0 & 1{,}4142 & -0{,}7071 \\ 0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 & -1{,}4142 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}7071 & 0{,}7071 \\ 0 & 0 \\ 1{,}4142 & 0{,}7071 \\ -0{,}7071 & -1{,}4142 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} = R$$

b) Für die Ausführung der weiteren Rechenschritte wird unter Berücksichtigung der Voraussetzung der Hauptkoponentenanalyse die Korrelationsmatrix R mit den charakteristischen Einsen auf der Hauptdiagonale (Selbstkorrelation) unter der Annahme verwendet, dass die gemeinsamen Faktoren die Varianz der zugehörigen Variable j vollständig erklären (die Kommunalitäten entsprechen dem Wert Eins).

Berechnung der Faktorladungsmatrix A durch Lösung eines Eigenwertproblems:

$$\det(R - \lambda E) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 0{,}5 \\ 0{,}5 & (1-\lambda) \end{pmatrix} ($$

$$\text{gesucht ist die Determinante einer } 2 \times 2\text{-Matrix. Allgemein bestimmt man}$$

$$\text{die Determinante einer } 2 \times 2\text{-Matrix wie folgt:}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$\Rightarrow \quad 1-2\lambda+\lambda^2-0{,}25=0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda^2-2\lambda+0{,}75=0$

Auflösen obiger Gleichung nach λ_1 bzw. λ_2, Umformung und Anwendung der pq-Formel führt zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2}$:

$\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{1-0{,}75}$

$\lambda_1=1{,}5$

$\lambda_2=0{,}5$

Auf Basis der Eigenwerte lassen sich im zweiten Schritt die dazugehörigen Eigenvektoren bestimmen. Oben eingesetzt erhält man:

für λ_1: $\begin{pmatrix}-0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow \quad \alpha_{11}=\alpha_{21}$

Dieses Verhältnis liefert allein noch keine numerisch eindeutigen Faktorladungswerte a_{jq}. Sie ergeben sich erst aus der Normierung der a_{jq} auf den entsprechenden Eigenwert λ_q, wenn man beliebige numerische Werte in die obige Beziehung einsetzt. Wählt man hier z.B. $\alpha_{11}=\alpha_{12}=1$ so erhält man mittels Normierungsformel für den Vektor der Faktorladungen (Eigenvektor) für den ersten Faktor:

$$a_j=\alpha_j\frac{\sqrt{\lambda_q}}{\sqrt{\alpha_{1q}^2+\alpha_{2q}^2}} \qquad \text{(Normierungsformel)}$$

für λ_1 erhält man somit:

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{\sqrt{1{,}5}}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix}0{,}866\\0{,}866\end{pmatrix}(1\,Punkt)$$

und für λ_2 :

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{12} = -\alpha_{22}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{0{,}5}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Werden beide Vektoren in einer Matrix zusammengefügt erhält man die Faktorladungsmatrix $A = (a_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix}($$

Die Faktorwertematrix P erhält durch die Anwendung nachstehender Gleichung:

$$P = A^{-1} \cdot Z$$

Für die Inverse einer 2×2 - Matrix gilt :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Für das Beispiel erhält man somit :

$$A^{-1} = \frac{1}{-0{,}866} \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}866 & 0{,}866 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5774 & 0{,}5774 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

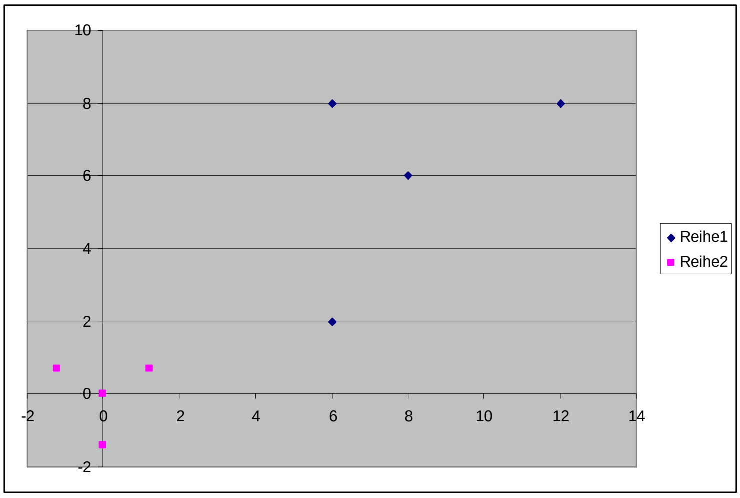
daraus folgt für die Faktorwertematrix P :

$$P = A^{-1} \cdot Z = \begin{pmatrix} 0{,}5774 & 0{,}5774 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}7071 & 0 & 1{,}4142 & -0{,}7071 \\ 0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 & -1{,}4142 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1{,}2248 & -1{,}2248 \\ -1{,}4142 & 0 & 0{,}7071 & 0{,}7071 \end{pmatrix}$$

Die ermittelten Faktorwerte in der Matrix P können Sie nun zusammen mit den Merkmalsausprägungen (X) im zweidimensionalen Raum darstellen.

c) Grafische Darstellung: Reihe 1 = Merkmalsausprägungen; Reihe 2 = Faktorwerte



Aufgabe 2:

Durch eine Verbraucheranalyse wurden elf verschiedene DVD-Recorder u.a. im Hinblick auf die Produkteigenschaften Bildqualität (BQ), Tonqualität (TQ), Fehlerkorrektur (FK), Handhabung (HH), Vielseitigkeit (VS) und Umwelteigenschaften (UE) untersucht.
Als DVD-Rekorder-Produzent sind Sie insbesondere daran interessiert, ob die einzelnen Eigenschaften alle unabhängig voneinander sind oder ob übergeordnete Faktoren hinter den einzelnen Eigenschaften stehen. Zur Bewältigung dieser Aufgabe entschließen Sie sich zur Durchführung einer Faktorenanalyse, wobei Sie von folgender Ausgangsdatenmatrix der elf Produkte im Hinblick auf die genannten Eigenschaften ausgehen.

	Produkteigenschaft					
Produkt	BQ	TQ	FK	HH	VS	UE
1	1	1	2	2	1	1
2	1	1	2	2	1	1
3	1	1	2	2	2	1
4	1	1	2	2	1	1
5	1	1	2	3	1	2
6	1	2	2	2	3	2
7	2	2	1	3	2	1
8	2	2	2	3	4	1
9	2	2	2	3	1	1
10	2	2	3	3	3	3
11	2	2	2	4	2	1

a) Standardisieren Sie die Ausgangsdatenmatrix! Welchen Vorteil hat diese Datentransformation für die weiteren Analyseschritte? (4 Punkte)

b) Als Eigenwerte der zugrunde liegenden Korrelationsmatrix erhalten Sie:

λ_1=2,6730; λ_2=1,6463; λ_3=1,0589; λ_4=0,3370; λ_5=0,2032; λ_6=0,0815.

Wieviele Faktoren sind
- bei Betrachtung der kumulierten Varianzanteile (> 95 %),
- gemäß des Kaiser-Kriteriums zu extrahieren? (7 Punkte)

b) Die ersten drei Eigenvektoren lauten:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5669 \\ 0{,}5707 \\ 0{,}0716 \\ 0{,}4913 \\ 0{,}2717 \\ 0{,}1806 \end{pmatrix}; \alpha_2 = \begin{pmatrix} -0{,}1615 \\ -0{,}0499 \\ 0{,}6966 \\ -0{,}1443 \\ 0{,}0681 \\ 0{,}6787 \end{pmatrix}; \alpha_3 = \begin{pmatrix} -0{,}1482 \\ 0{,}1687 \\ -0{,}1833 \\ -0{,}.4573 \\ 0{,}8406 \\ -0{,}0163 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Faktorladungsmatrix für die ersten drei Faktoren! Ermitteln Sie die Faktorvarianzen, die Variablenkommunalitäten und die Gesamtkommunalität! (13 Punkte)

c) Interpretieren Sie das folgende aus der Faktorrotation der ersten drei Faktoren resultierende Faktormuster: (6 Punkte)

	Faktoren		
Eigenschaft	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
BQ	0,9445	-0,0109	0,1821
TQ	0,8069	0,0835	0,4968
FK	-0,0262	0,9177	-0,0730
HH	0,9354	0,0330	-0,1569
VS	0,0904	0,0437	0,9712
UE	0,0828	0,9036	0,1501

Hinweise:

$$z_{jk} = \frac{x_{jk} - \bar{x}_j}{s_j} \;\forall j, k$$

$$R = \frac{1}{K-1} ZZ'$$

$$a_{jq} = \alpha_{jq} \frac{\sqrt{\lambda_q}}{\sqrt{\alpha_{1q}^2 + \alpha_{2q}^2 + \ldots + \alpha_{Jq}^2}} \;\forall j, q$$

Lösungsskizze:

a) Standardisieren der Ausgangsmatrix mit der angegebenen Formel für z_{jk} führt zu:

$$Z = \begin{pmatrix} -0{,}8704 & -1{,}0446 & 0 & -0{,}9439 & -0{,}7207 & -0{,}5393 \\ -0{,}8704 & -1{,}0446 & 0 & -0{,}9439 & -0{,}7207 & -0{,}5393 \\ -0{,}8704 & -1{,}0446 & 0 & -0{,}9439 & 0{,}2702 & -0{,}5393 \\ -0{,}8704 & -1{,}0446 & 0 & -0{,}9439 & -0{,}7207 & -0{,}5393 \\ -0{,}8704 & -1{,}0446 & 0 & 0{,}5393 & -0{,}7207 & 0{,}9439 \\ -0{,}8704 & 0{,}8704 & 0 & -0{,}9439 & 1{,}26162 & 0{,}9439 \\ 1{,}0446 & 0{,}8704 & -2{,}2361 & 0{,}5393 & 0{,}2702 & -0{,}5393 \\ 1{,}0446 & 0{,}8704 & 0 & 0{,}5393 & 2{,}2522 & -0{,}5393 \\ 1{,}0446 & 0{,}8704 & 0 & 0{,}5393 & -0{,}7207 & -0{,}5393 \\ 1{,}0446 & 0{,}8704 & 2{,}2361 & 0{,}5393 & 1{,}2612 & 2{,}4272 \\ 1{,}0446 & 0{,}8704 & 0 & 2{,}0225 & 0{,}2702 & -0{,}5393 \end{pmatrix} \text{(2 Punkte)}$$

Vorteile (2 Punkte)**:**

- Vereinfachung der weiteren Berechnungen
- Vergleichbarkeit der betrachteten Variablen

b)

- Betrachtung der **kumulierten Varianzanteile (95%)**:

$$\lambda_{1/J} = 2{,}6730 : 6 = 0{,}4455$$
$$\lambda_{2/J} = 1{,}6463 : 6 = 0{,}2743$$
$$\lambda_{3/J} = 1{,}0589 : 6 = 0{,}1765 \qquad \text{(6 Punkte)}$$
$$\lambda_{4/J} = 0{,}3370 : 6 = 0{,}0562$$
$$\Rightarrow 0{,}4455 + 0{,}2743 + 0{,}1765 + 0{,}0562 = 0{,}9525$$

Demnach sind die Eigenwerte 1-4 zu extrahieren.

- **Kaiser-Kriterium:**
  Alle Eigenwerte > 1 sind zu extrahieren, demnach die Eigenwerte 1-3 (1 Punkt)

c) Durch Einsetzen in die gegebene Gleichung erhält man die Faktorladungsmatrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9268 & -0{,}2072 & -0{,}1525 \\ 0{,}9331 & -0{,}064 & 0{,}1736 \\ 0{,}1171 & 0{,}8938 & -0{,}1886 \\ 0{,}8032 & -0{,}1851 & -0{,}4706 \\ 0{,}4442 & 0{,}0874 & 0{,}865 \\ 0{,}2953 & 0{,}8708 & -0{,}0168 \end{pmatrix} \text{(3 Punkte)}$$

Faktorvarianzen (Spaltenweise):

$$\sum a_{j1}^2 = 2{,}6654 = \lambda_1$$
$$\sum a_{j2}^2 = 1{,}6461 = \lambda_2 \text{ (3 Punkte)}$$
$$\sum a_{j3}^2 = 1{,}0589 = \lambda_3$$

Variablenkommunalitäten (Zeilenweise):

$$\sum a_{1q}^2 = 0{,}9251$$
$$\sum a_{2q}^2 = 0{,}9409$$
$$\sum a_{3q}^2 = 0{,}8482 \qquad \text{(6 Punkte)}$$
$$\sum a_{4q}^2 = 0{,}9009$$
$$\sum a_{5q}^2 = 0{,}9251$$
$$\sum a_{6q}^2 = 0{,}8458$$

Gesamtkommunalität = 5,5378 (1 Punkt)

d) Bei jeder Eigenschaft lädt jeweils der Faktor mit dem höchsten Wert.

BQ: Faktor 1
TQ: Faktor 1
FK: Faktor 2
HH: Faktor 1
VS: Faktor 3
UE: Faktor 2