Dr. Boris Nöll

Bewertung von Aktien- und Zinsderivaten

Wintersemester 2012/2013

Literatur

Cox, John C./Ross, Stephen A./Rubinstein, Mark (1978): Option pricing: a simplified approach, in: Journal of financial economics, Vol. 7, No. 3, S. 229 - 263.

Droszdol, Adam (2005): Zinsmanagement mit Zinsstrukturmodellen, Frankfurt am Main.

Fabozzi, Frank J./Kalotay, Andrew/Dorigan, Michael (2002): Using the lattice model to value bonds with embedded options, floaters, options, and caps/floors, in: Interest rate, term structure, and valuation modeling, Fabozzi, Frank J. (Hrsg.), Hoboken, S. 357 - 378.

Fabozzi, Frank J./Kalotay, Andrew/Dorigan, Michael (2002): Yield Curves and valuation lattices: a primer, in: Interest rate, term structure, and valuation modeling, Fabozzi, Frank J. (Hrsg.), Hoboken, S. 345 - 356.

Gürtler, Marc (2003): Risikoneutrale Bewertung bei risikoaversen Marktteilnehmern, in: WiSt, Heft 2, Februar 2003, S. 101 - 103.

Hull, John/White, Alan (1994): Numerical procedures for implementing term structure models I: single-factor models, in: The journal of derivatives, Vol. 2, No. 1, S. 7 - 16.

Neftci, Salih N. (2000): An introduction to the mathematics of financial derivatives, 2. Auflage, San Diego et al. (S. 1 - 40).

Nöll, Boris (2011): Messung des Zinsrisikos in Unternehmen, Frankfurt am Main (S. 33 -108).

Nöll, Boris/Wiedemann, Arnd (2010): Kommunales Schuldenmanagement - Band 1, Stuttgart
(S. 117 – 123, S. 141 - 159, S. 170 - 178).

Rudolph, Bernd/Schäfer, Klaus (2010): Derivative Finanzmarktinstrumente, 2. Auflage, Berlin et al. (S. 284 - 348).

Wiedemann, Arnd (2009): Financial Engineering, 5. Auflage, Frankfurt am Main (S. 153 - 212).

Gliederung

Bewertung von Aktienoptionen

- Einführung
- Risikoneutrale Bewertung derivativer Finanzinstrumente
- Binomialmodell
  - Grundmodell von Cox, Ross und Rubinstein
  - Integration nichtflacher Zinsstrukturkurven
  - Berücksichtigung von Dividendenzahlungen
- Stochastische Prozesse
- Implizite Volatilitäten

Bewertung von Zinsoptionen

- Besonderheiten des Risikofaktorsystems Zinsstrukturkurve
- Kalibrierung von Zinsmodellen
- Zinsmodell mit normalverteilten Zinsänderungen
- Zinsmodell von Hull und White

Optionsbegriff

- Eine Option ist eine vertragliche Vereinbarung, die dem Käufer (long-Position/holder) der Option das **Recht** einräumt, einen festgelegten Basiswert (underlying) zu einem vorab festgelegten Basispreis (strike) zu kaufen (Calloption) bzw. zu verkaufen (Putoption).
- Der Verkäufer einer Option (Stillhalter/short-Position/writer) geht die **Verpflichtung** ein, den Basiswert zu liefern (Calloption) bzw. diesen vom Käufer abzunehmen (Putoption).
- Je nach zeitlicher Gestaltung der Ausübungsmöglichkeiten ist zu differenzieren zwischen:

  - europäische Option: Ausübung nur am Ende der Laufzeit möglich
  - amerikanische Option: Ausübung jederzeit während der Laufzeit möglich
  - Bermudaoption (atlantic option): Ausübung zu bestimmten (diskreten) Zeitpunkten während der Laufzeit möglich.

- Die Rechte und Verpflichtungen aus dem Optionskontrakt sind zwischen Käufer und Verkäufer ungleichmäßig verteilt. Der Käufer verfügt über den maßgeblichen Gestaltungsspielraum, da er bei Eintritt einer für ihn ungünstigen Kursentwicklung des Basiswertes die Option verfallen lassen kann (asymmetrisches Auszahlungsprofil). Für die Übertragung von Rechten auf den Käufer erhält der Verkäufer vorab eine Entschädigung (Optionspreis).

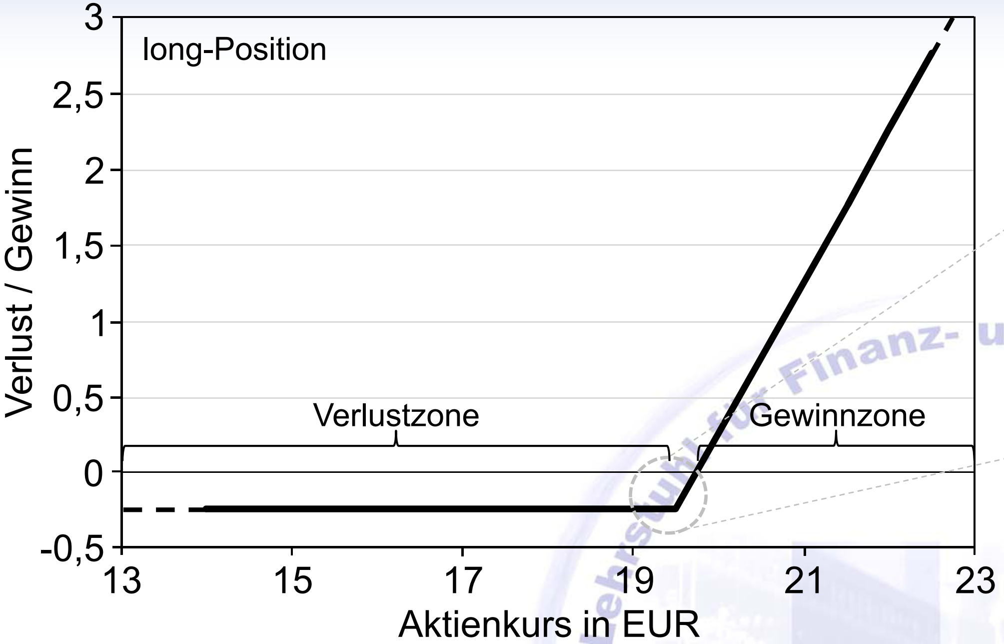
Aktienoptionen an der EUREX

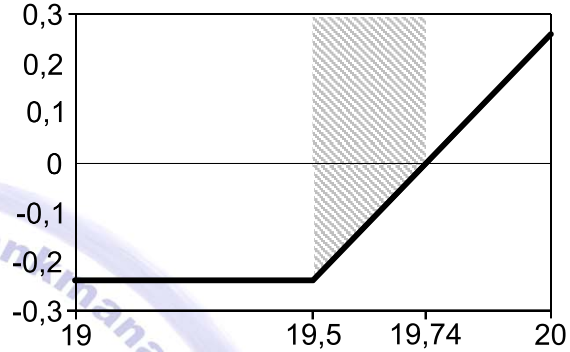
Strike Price	Vers. Num.	Eröff-nungs-preis	Hoch	Tief	Geld Vol.	Geld Preis	Brief Preis	Brief Vol.	Abw. gegenüb. Vortag	Letzter Preis	Datum	Zeit	Tägl. Abrech-nungspreis	Gehand. Kontr.	Open Interest (angep.)	Open Interest-Datum
21.00	0	n/v	n/v	n/v	350	0.02	0.04	250	0.00% →	0.02	18.07.11	12:26:16	0.03	0	22,908	18.07.11
20.00	0	0.13	0.14	0.12	350	0.11	0.13	300	8.33% ↑	0.13	19.07.11	14:54:50	0.10	598	39,301	18.07.11
19.50	0	0.21	0.26	0.21	186	0.22	0.24	300	26.32% ↑	0.24	19.07.11	14:30:07	0.18	7,078	5,213	18.07.11
19.00	0	0.42	0.42	0.41	121	0.40	0.42	350	28.12% ↑	0.41	19.07.11	14:30:00	0.33	57	14,064	18.07.11
18.50	0	n/v	n/v	n/v	205	0.65	0.67	150	0.00% →	0.58	18.07.11	15:56:30	0.54	0	4,643	18.07.11
18.00	0	1.04	1.04	1.04	300	0.97	1.01	300	23.81% ↑	1.04	19.07.11	10:39:37	0.81	2	355	18.07.11

Abfrage vom 19.07.2011, 15.15 Uhr

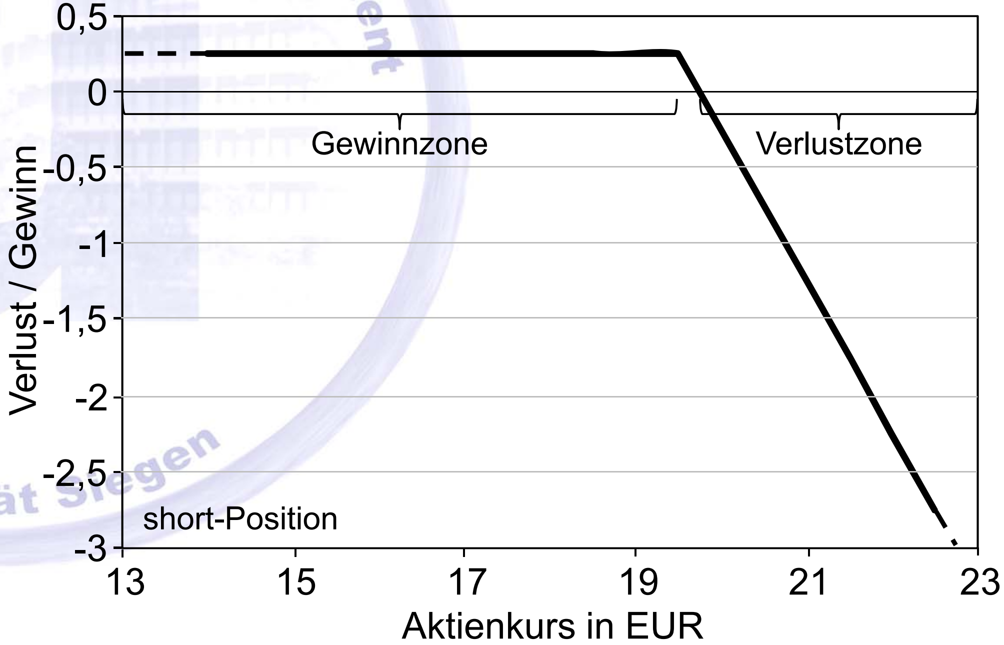
- Kontraktspezifikationen:
  - Optionstyp: Calloption
  - Ausübung: amerikanisch
  - Basiswert: E.ON AG Namensaktien o.N. (DE000ENAG999)
  - Erfüllung: physische Lieferung von 100 Aktien zwei Handelstage nach Ausübung
  - letzter Handelstag: 19.08.2011
- Ausgewählter Optionskontrakt:
  - Calloption
  - Basispreis: 19,50 EUR
  - Optionspreis: 0,24 EUR
- Der Preis der Option hängt unmittelbar vom Kursverlauf der E.ON-Aktie ab. Daher handelt es sich um ein derivatives („abgeleitetes“) Wertpapier.

Gewinn- und Verlustprofil der E.ON-Calloption





- Der Verlust des Optionskäufer ist ex ante auf die Höhe der Optionsprämie begrenzt. Sein potenzieller Gewinn hingegen ist (theoretisch) unbegrenzt.
- Der mögliche Gewinn des Verkäufers kann die Höhe der Optionsprämie nicht übersteigen. Sein Verlust kann (theoretisch) unbegrenzt anwachsen.



Transaktionen bei Kauf und Ausübung*

- Kauf der Option (19.07.2011):

Käufer | Verkäufer

zahlt die Optionsprämie: 100 · 0,24 EUR = 24 EUR →

← räumt das Optionsrecht ein

Options-
recht

- Verfalltermin (19.08.2011):

1. Der Kurs der E.ON-Aktie liegt über 19,50 EUR. → Der Optionskäufer übt aus.

Käufer | Verkäufer

zahlt den Basispreis: 100 · 19,50 EUR = 1.950 EUR →

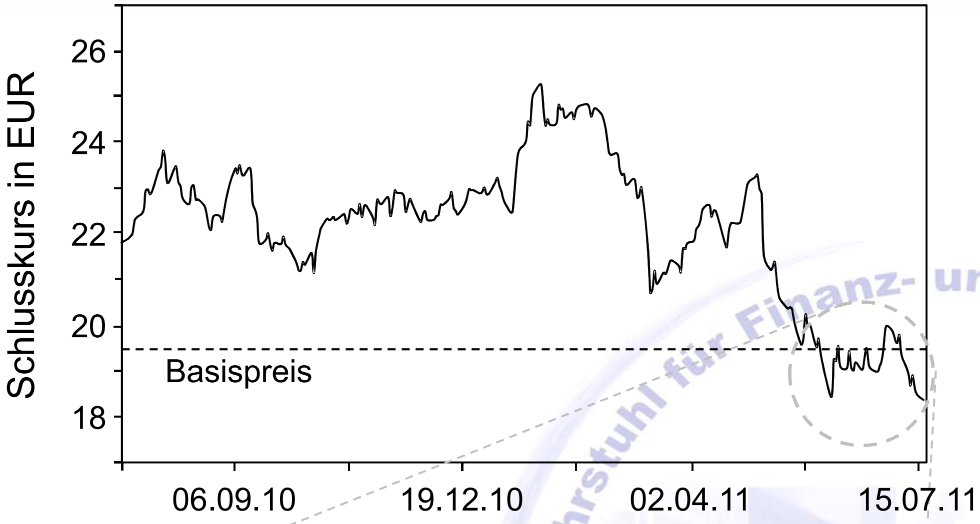
← liefert 100 Aktien

E.ON AG
Namensaktie

2. Der Kurs der E.ON-Aktie liegt bei 19,50 EUR oder darunter. → Der Optionskäufer übt nicht aus.

*Vereinfachend wird unterstellt, es handele sich um eine europäische Option.

Kursverlauf der E.ON-Aktie



Intraday-Kursverlauf am 19.07.2011*

Optionspreis am 19.07.2011 um 14:30:07 Uhr: 0,24 EUR

Restlaufzeit: 31 Tage (einschließlich Nicht-Handelstagen)

*Quelle: www.handelsblatt.com

Innerer Wert

- Der innere Wert einer Option entspricht demjenigen Kapitalbetrag, den der Käufer bei sofortiger Ausübung des Derivats erlösen würde (unabhängig davon, ob dieses Recht besteht oder nicht).
- Bei einer Calloption entspricht der innere Wert C_t^{IW} im Zeitpunkt t:

$$C_t^{IW} = \max\left(A_t - X;0\right)$$

A_t: Aktienkurs in t
X: Basispreis

- Sofern der Aktienkurs A_t unter den Basispreis X fällt, ist die Ausübung der Option für den Käufer unwirtschaftlich. Der innere Wert liegt daher niemals unter Null.
- Der innere Wert einer Option kann jederzeit auch ohne die Verwendung eines Optionspreis-modells berechnet werden. Er ist deterministisch.
- Innerer Wert der E.ON-Calloption am 19.07.2011:

$$C_{19.07.2011}^{IW} = \max\left(18{,}73 - 19{,}50;0\right) = 0 \text{ EUR}$$

Zeitwert

- Der Zeitwert einer Option ist als derjenige Preis zu interpretieren, den der Käufer für die Chance zahlt, dass sich der Basiswert während der Restlaufzeit des Derivats in eine für ihn vorteilhafte Richtung bewegt.
- Die Ermittlung des Zeitwertes basiert auf Wahrscheinlichkeitsaussagen. Er kann daher nur unter Verwendung stochastischer Optionspreismodelle berechnet werden. Dabei wird nicht der Zeitwert direkt ermittelt, sondern der gesamte Optionspreis (aus diesem lässt sich sodann der Zeitwert ableiten).
- Der Zeitwert ergibt sich immer als Differenz zwischen Optionspreis und innerem Wert:

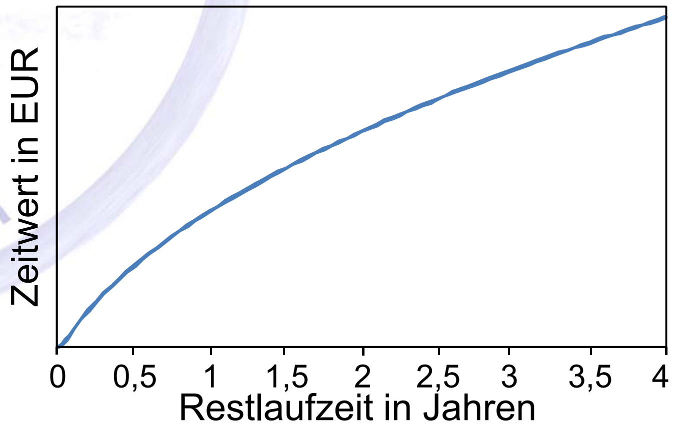
$$\text{Zeitwert} = \text{Optionspreis} - \text{innerer Wert}$$

- Im Hinblick auf eine Calloption bedeutet dies:

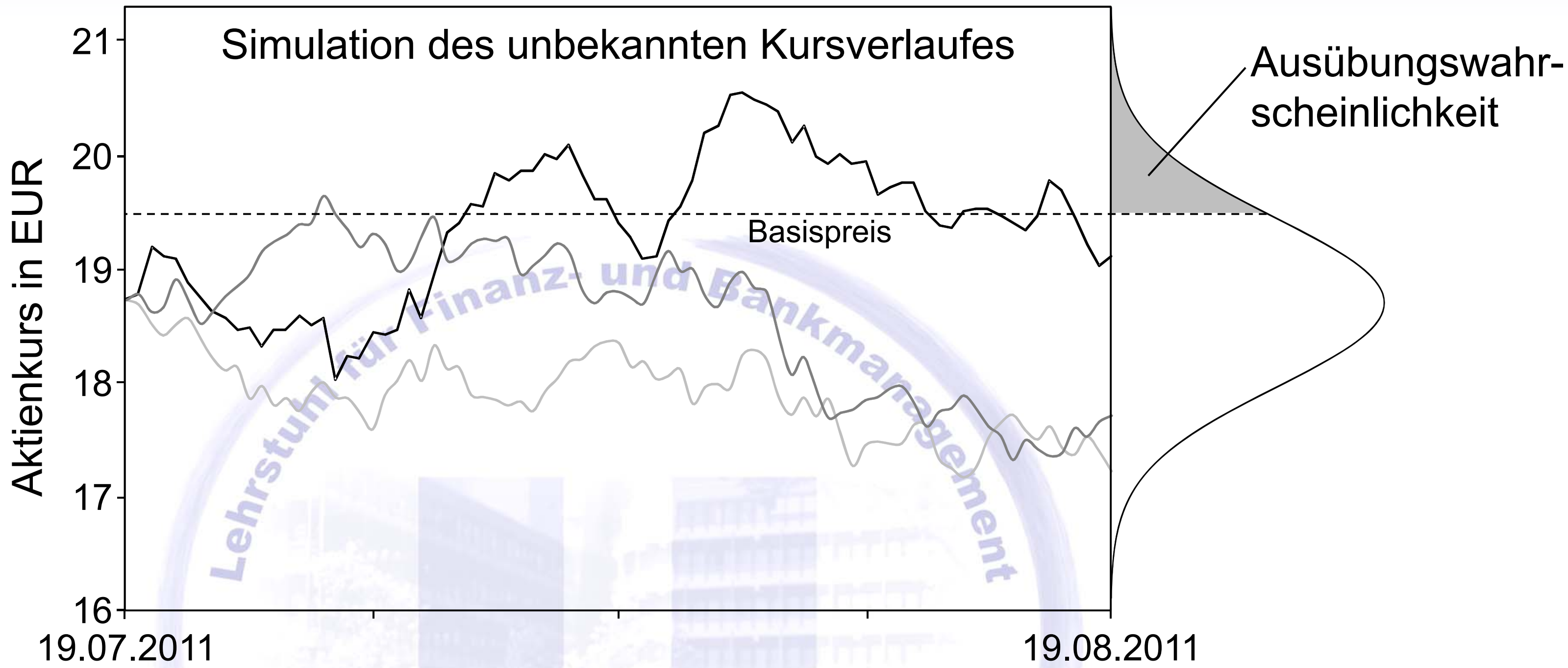
$$C_t^{ZW} = C_t - C_t^{IW}$$

- Der Zeitwert einer Calloption ist umso höher, je größer die Marktteilnehmer die Wahrscheinlichkeit und die Intensität einschätzen, mit der der Kurs des Basiswertes über den Basispreis der Option ansteigt.
- Zeitwert der E.ON-Calloption am 19.07.2011:

$$C_{19.07.2011}^{ZW} = 0{,}24 - 0 = 0{,}24 \text{ EUR}$$



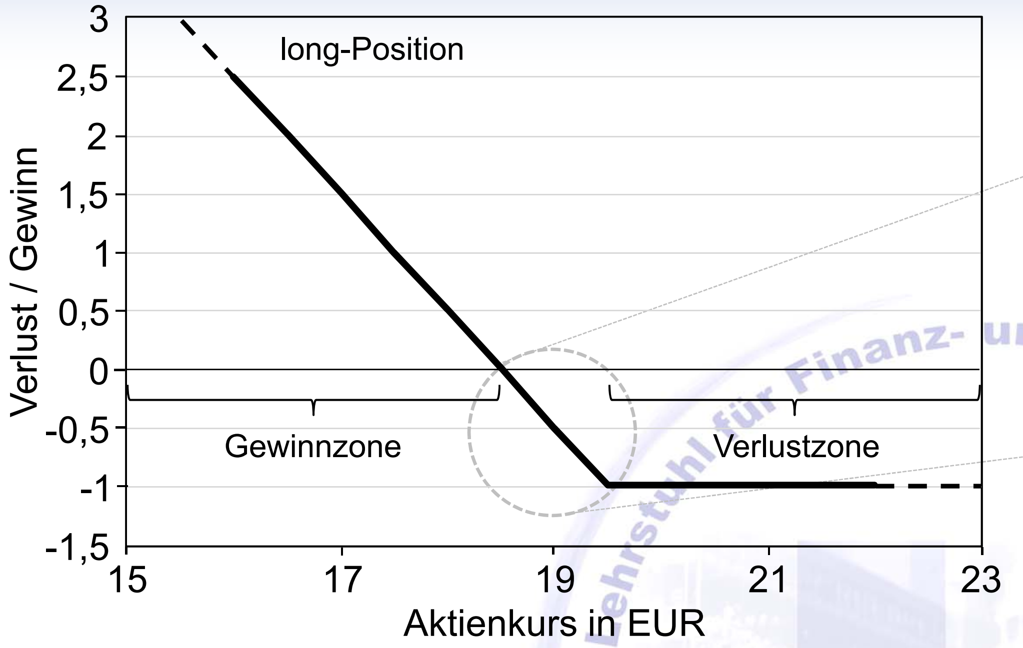
Zeitwert und Ausübungswahrscheinlichkeit*

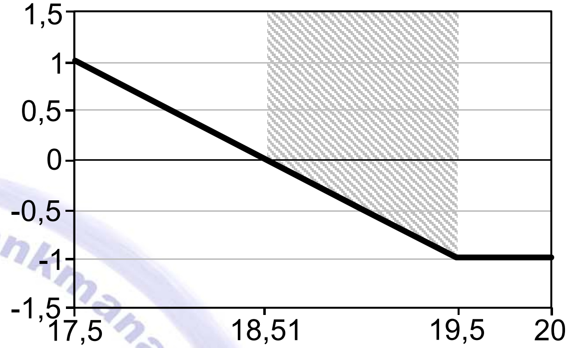


- Im Zeitwert manifestiert sich die Größe der grau unterlegten Fläche unter der Dichtefunktion.
- Zur Bestimmung der Ausübungswahrscheinlichkeit muss ein Optionspreismodell eine Annahme über die noch unbekannte Fortentwicklung des Aktienkurses während der Optionslaufzeit treffen.
- Unterschiedliche Optionspreismodelle differieren in erster Linie hinsichtlich der Ausgestaltung des zur Fortschreibung des Aktienkurses verwendeten stochastischen Prozesses.

*Vereinfachend wird unterstellt, es handele sich um eine europäische Option.

Gewinn- und Verlustprofil einer Putoption

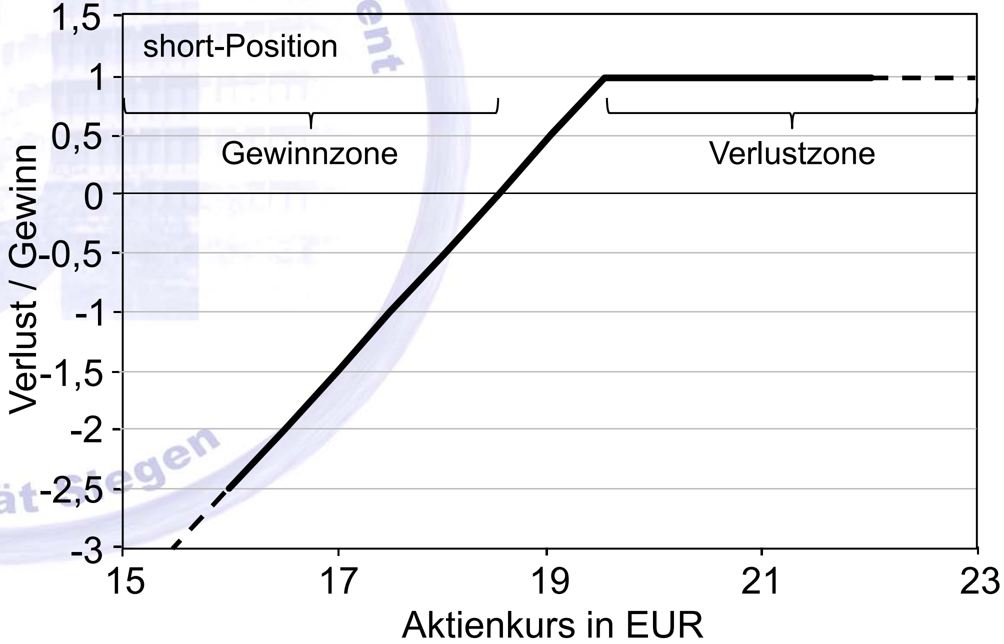




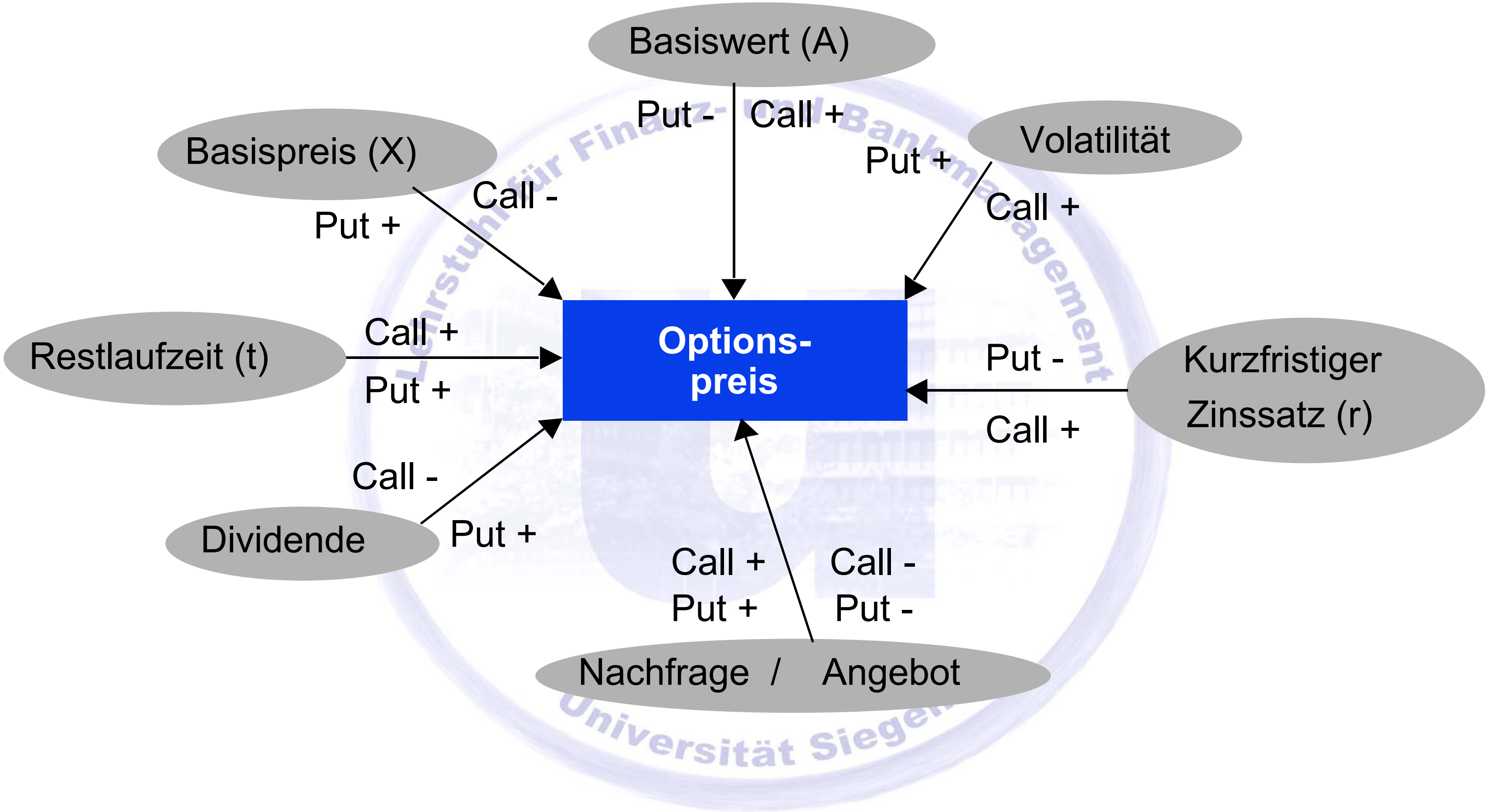
- innerer Wert:

  $$P_t^{IW} = \max\left(X - A_t; 0\right)$$

- Basispreis: 19,50 EUR



Preisbestimmungsfaktoren von Optionen



Übersicht Optionspreismodelle

- Optionspreismodelle
  - Statistische oder ökonometrische Bewertungsmodelle
  - Gleichgewichtsmodelle mit Aktienverlaufshypothesen
    - partielle Gleichgewichsmodelle
    - vollständige Gleichgewichsmodelle

- Statistische bzw. ökonometrische Gleichgewichtsmodelle:
  Ableitung von Optionspreisen auf Basis von Regressionsanalysen vergangenheitsorientierter Daten
- Gleichgewichtsmodelle:
  Basieren auf der Annahme, dass es einen theoretisch exakten Optionspreis gibt, zu dem keinem Marktteilnehmer risikofreie Arbitragegewinne möglich sind.

Zentrale Begriffe im Kontext der Derivatebewertung

- Lösung von Bewertungsmodellen:
  - analytisch: die zu Grunde liegende Differentialgleichung kann explizit nach dem gesuchten Preis des Derivats aufgelöst werden
  - numerisch: die Differentialgleichung kann ausschließlich durch ein numerisches Verfahren gelöst werden

    - Baumansätze (Binomial-/Trinomialbaum)
    - Gitteransätze (explizite, implizite, semi-implizite finite Differenzen)
    - Monte Carlo Simulation
- Pfadabhängigkeit
  - pfadunabhängige Derivate: die Auszahlung aus dem Kontrakt hängt ausschließlich vom Kurs des Basiswertes am Verfalltag ab
  - pfadabhängige Derivate: die Auszahlung hängt vom einem Teil des während der Optionslaufzeit beobachteten Kursverlaufs des Basiswertes ab bzw. vom gesamten während der Optionslaufzeit beobachteten Kursverlauf.

Black-Scholes-Modell für Aktienoptionen

- Calloption

$$C = A \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{X}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

Putoption

$$P = X \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(-d_2) - A \cdot N(-d_1)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

- Aktienkurs A: 18,73 EUR
  Basispreis X: 19,50 EUR
  Volatilität: 24,27%

  Restlaufzeit t: 1 Monat
  stetiger Zinssatz R: 1,495%

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{18,73}{19,50}\right) + \left(0,01459 + \frac{0,2427^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{12}}{0,2427 \cdot \sqrt{\frac{1}{12}}} = -0,5256$$

$$d_2 = -0,5256 - 0,2427 \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} = -0,5966$$

$$N(-0,5265) = 0,2993 \quad N(-0,5966) = 0,2754 \quad N(0,5265) = 0,7007 \quad N(0,5966) = 0,7246$$

$$C = 18,73 \cdot 0,2993 - 19,50 \cdot e^{-0,01495 \cdot 1/12} \cdot 0,2754 = 0,24 \text{ EUR}$$

$$P = 19,50 \cdot e^{-0,01495 \cdot 1/12} \cdot 0,7246 - 18,73 \cdot 0,7007 = 0,99 \text{ EUR}$$

Gliederung

Bewertung von Aktienoptionen

- Einführung
- Risikoneutrale Bewertung derivativer Finanzinstrumente
- Binomialmodell
  - Grundmodell von Cox, Ross und Rubinstein
  - Integration nichtflacher Zinsstrukturkurven
  - Berücksichtigung von Dividendenzahlungen
- Stochastische Prozesse
- Implizite Volatilitäten

Bewertung von Zinsoptionen

- Besonderheiten des Risikofaktorsystems Zinsstrukturkurve
- Kalibrierung von Zinsmodellen
- Zinsmodell mit normalverteilten Zinsänderungen
- Zinsmodell von Hull und White

Annahmen im einperiodischen Binomialmodell

- Betrachtet wird die Kursentwicklung von Wertpapieren auf einem Kapitalmarkt von i = 0 (Startzeitpunkt) nach i = 1 (Endzeitpunkt). Handelsaktivitäten sind ausschließlich im Startzeitpunkt möglich.
- Der Zustand des Kapitalmarktes zum Zeitpunkt i = 0 ist bekannt.
- Im Endzeitpunkt wird der Kapitalmarkt genau einen von zwei möglichen Zuständen aus der Menge S von Umweltzuständen (Szenarien) $\{z_1, z_2\}$ einnehmen. Die Menge der erreichbaren Szenarien wird im Zustandsraum $S = \{z_1, z_2\}$ zusammengefasst.
- Sämtlichen Marktteilnehmer ist der Zustandsraum S bekannt.
- Jeder Umweltzustand tritt mit positiver Wahrscheinlichkeit ein. Die Summe der Eintrittswahrscheinlichkeiten über die beiden Umweltzustände ist Eins (Sicherheit über die Unsicherheit).
- Auf dem Kapitalmarkt werden 2 Wertpapiere F^1, F^2 gehandelt, deren heutige Preise F_0^1, F_0^2 bekannt sind. Welche Zahlung F_{1,z_s}^n das n-te Wertpapier im Zeitpunkt i = 1 bei Eintritt des Zustandes z_s leistet, ist in i = 0 bereits bekannt. Nicht bekannt ist hingegen, welcher Zustand in i = 1 eintreten wird. Dies stellt sich erst heraus, wenn der Zeitpunkt i = 1 erreicht wird.

Grundstruktur des Binomialmodells

- Betrachtet wird ein Zeithorizont von einem halben Jahr.
- Notation: i: laufende Nummer des Zeitschritts; t: Zeitindex; u: Aufwärtszustand (z_2); d: Abwärtszustand (z_1)
- Modellierung des Aktienkurses:

i = 0 — i = 1

t = 0 — t = 0,5

$$A_0 = 100 \quad \rightarrow \quad A_{1,u} = 132{,}69 \quad / \quad A_{1,d} = 75{,}36$$

Der Kurs der Aktie in i = 1 hängt vom jeweiligen Umweltzustand ab → risikobehaftete Anlagemöglichkeit.

- Modellierung des Anleihekurses:

$$B_0 = 1 \quad \rightarrow \quad B_{1,u} = 1{,}015^{*} \quad / \quad B_{1,d} = 1{,}015$$

Der Rückzahlungsbetrag der Anleihe ist unabhängig vom eintretenden Szenario → bonitätsrisikolose Anlage.

- Betrachtung des gesamten Kapitalmarktes:

$$\underline{F}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{F}_{1,u} = \begin{pmatrix} 132{,}69 \\ 1{,}015 \end{pmatrix} \quad / \quad \underline{F}_{1,d} = \begin{pmatrix} 75{,}36 \\ 1{,}015 \end{pmatrix}$$

*Der exakte Wert beläuft sich auf $B_{1,u} = B_{1,d} = e^{0,03 \cdot 0,5}$.

moodle Grundstruktur des Binomialmodells.xlsx

Bildung von Wertpapierportfolios

- Die am Markt gehandelten Wertpapiere lassen sich zu Portfolios zusammenfassen.
- Der Vektor $\underline{x}$ gibt die Zusammensetzung des Portfolios an. Dabei kennzeichnet x_A (x_B) die Anzahl der im Portfolio enthaltenen Aktien (Anleihen), nicht den prozentualen Portfolioanteil.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^N$$

- Positive Stückzahlen ($x_n > 0$) kennzeichnen long-Positionen im jeweiligen Instrument. Negative Stückzahlen ($x_n < 0$) geben an, dass das zugehörige Wertpapier als short-Position gehalten wird bzw. leerverkauft wurde.
- Preis eines Portfolios in t = 0:

$$F_0 = \underline{x}^T \cdot \underline{F_0} \quad \text{mit } \underline{F_0} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \end{pmatrix}^T$$

- Beispiel: Portfolio aus 7 Aktien und 5 Anleihen:

$$F_0 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = 705 \text{ EUR}$$

Portfolio aus 3 Aktien und 6 emittierten Anleihen:

$$F_0 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = 294 \text{ EUR}$$

Payoff-Matrix und Bewertung von Finanzinstrumenten

- In der Payoff-Matrix werden die Zahlungen sämtlicher Wertpapiere des Kapitalmarktes im Endzeitpunkt i = 1 in Matrixschreibweise zusammengefasst.

$$\underline{\underline{F}}_1 = \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} A_{1,u} & A_{1,d} \\ B_{1,u} & B_{1,d} \end{pmatrix}$$

Aus Gründen der Notationsvereinfachung wird auf den Subindex „1“ zur Angabe des Zeitpunktes verzichtet.

- Im hier betrachteten Binomialmodell gilt damit:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 132{,}69 & 75{,}36 \\ 1{,}015 & 1{,}015 \end{pmatrix}$$

- Schritte zur Bewertung neuer Finanzinstrumente im Binomialmodell
  1. Bilde aus den marktgehandelten Instrumenten (hier: Aktie und Anleihe) ein Portfolio in der Weise, dass die Zahlungsströme des Finanzinstruments, dessen Preis gesucht ist, exakt nachgebildet werden (Replikationsportfolio).
  2. Bestimme den Preis dieses Portfolios. Er muss aufgrund des „law of one price“ mit dem gesuchten Preis des neuen Finanzinstruments übereinstimmen.

Bewertung einer Calloption

- Ein Kreditinstitut beabsichtigt, eine Calloption auf die Aktie zu emittieren.
- Kontraktmerkmale

Basiswert:	Aktie	Laufzeit:	von t = 0 nach t = 0,5
Ausübung:	europäisch	Basispreis:	90 EUR

- Gesucht ist der faire Preis dieser Option bei gegebenen Preisen von Aktie und Anleihe.

  Optionspreis (C_0) = innerer Wert + Zeitwert

- Zur Berechnung des inneren Wertes der Option kann auf das bekannte Auszahlungsprofil zurückgegriffen werden:

  i = 0: $C_0^{IW} = \max\left(A_0 - \text{Basispreis};\ 0\right) = \max\left(100 - 90;\ 0\right) = 10 \text{ EUR} \neq C_0$

  i = 1: u: $C_{1,u} = C_{1,u}^{IW} = \max\left(A_{1,u} - \text{Basispreis};\ 0\right) = \max\left(132{,}69 - 90;\ 0\right) = 42{,}69 \text{ EUR}$

  d: $C_{1,d} = C_{1,d}^{IW} = \max\left(A_{1,d} - \text{Basispreis};\ 0\right) = \max\left(75{,}36 - 90;\ 0\right) = 0 \text{ EUR}$

$$A_0 = 100 \begin{cases} \nearrow A_{1,u} = 132{,}69 \\ \searrow A_{1,d} = 75{,}36 \end{cases} \qquad C_0 = ? \begin{cases} \nearrow C_{1,u} = 42{,}69 \\ \searrow C_{1,d} = 0 \end{cases}$$

- In t = 0 weist die Option neben dem inneren Wert zusätzlich auch einen Zeitwert auf. Dieser kann ausschließlich unter Verwendung eines stochastischen Modells ermittelt werden, das den Kursverlauf des Basiswertes simuliert.

Replikationsportfolio

- Mit Hilfe eines Replikationsportfolios sollen die Auszahlungen der Calloption nachgebildet werden. Hierzu ist sind die Stückzahlen der Aktie x_A und der Anleihe x_B so zu wählen, dass das entstehende Portfolio in u zu einer Zahlung von 42,69 EUR und in d zu einer Zahlung von 0 EUR führt.

$$\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{x} = \underline{C}_1 \Leftrightarrow \underline{x} = \left[\underline{\underline{F}}^T\right]^{-1} \cdot \underline{C}_1$$

$$\begin{pmatrix} 132{,}69 & 1{,}015 \\ 75{,}36 & 1{,}015 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42{,}69 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0174 & -0{,}0174 \\ -1{,}2951 & 2.2802 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 42{,}69 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7447 \\ -55{,}2867 \end{pmatrix}$$

x_A = 0,7447: Erwerb von 0,7447 Aktien (long-Position)
x_B = -55,2867: Emission von 55,2867 Anleihen (short-Position → Kreditaufnahme)

$$F_0 = ? \quad \begin{cases} F_{1,u} = 0{,}7447 \cdot 132{,}69 + (-55{,}2867) \cdot 1{,}015 = 42{,}69 \text{ EUR} \\ F_{1,d} = 0{,}7447 \cdot 75{,}36 + (-55{,}2867) \cdot 1{,}015 = 0 \text{ EUR} \end{cases}$$

- Der Vektor $\underline{x}$ = (0,7447 -55,2867)^T repliziert das Auszahlungsprofil $\underline{C}_1$ = (42,69 0)^T.
- Ein Auszahlungsprofil ist genau dann replizierbar, wenn ein Portfolio $\underline{x}$ existiert, für das

$$\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{x} = \underline{C}_1 \Leftrightarrow \underline{x} = \left[\underline{\underline{F}}^T\right]^{-1} \cdot \underline{C}_1$$

gilt, wobei $\underline{C}_1$ nun für das Auszahlungsprofils eines beliebigen Finanztitels steht.

Gesetz des Einheitspreises (law of one price)

- Law of one price: Zwei Finanzinstrumente / Portfolien, die in jedem zukünftigen Zustand dieselben Zahlungen aufweisen, müssen heute den gleichen Preis besitzen.
- Damit resultiert für den Preis der Calloption:

$$C_0 = F_0 = \underline{x}^T \cdot \underline{F}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}7447 & -55{,}2867 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = 19{,}18 \text{ EUR}$$

- Die Preise der Bestandteile des Replikationsportfolios in i = 0 sind am Markt beobachtbar. Folglich lässt sich bei Kenntnis der Zusammensetzung der aktuelle Wert des Portfolios berechnen. Dieser stimmt gemäß dem „law of one price“ mit dem Optionspreis in i = 0 überein.
- Der Optionspreis im Beispiel beinhaltet sowohl einen inneren Wert (10,00 EUR) als auch einen Zeitwert (9,18 EUR):

$$C_0 = C_0^{IW} + C_0^{ZW} = 10{,}00 + 9{,}18 = 19{,}18 \text{ EUR}$$

Charakteristika des Bewertungsmodells

- Die Ermittlung des Optionspreises ist allein dann möglich, wenn bestehende, bereits am Markt gehandelte Finanzinstrumente, deren Preise bekannt sind, zu einem Portfolio kombiniert werden können, dessen Zahlungsprofil exakt mit dem der Option übereinstimmt.
- Zur Ermittlung des Optionspreises ist die Kenntnis der Eintrittswahrscheinlichkeiten der beiden Umweltzustände nicht erforderlich. Insbesondere werden keine vom Investor für die Umweltzustände geschätzten, subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten benötigt. Folglich ist seine subjektive Einschätzung über die zukünftige Entwicklung der Ökonomie für die Bewertung eines Zahlungsstromes unerheblich. Vielmehr kommen ausschließlich beobachtbare Marktpreise bereits gehandelter Finanzinstrumente zum Einsatz → präferenzfreie Bewertung.
- Da der Optionspreis am Ende der Periode genau zwei mögliche Realisationen annehmen kann, muss sich das Replikationsportfolio aus genau zwei Finanztiteln (Aktie und Anleihe) zusammensetzen, um die Auszahlungen des Derivats exakt nachzubilden.
- Als Ausgangspunkt zur Berechnung des Optionspreises dienen die Cash Flows im Verfalltermin. Zu diesem Zeitpunkt weist die Option lediglich einen inneren Wert aber keinen Zeitwert auf. Sodann werden die inneren Werte vom letzten Zeitschritt auf den aktuellen Zeitpunkt transformiert → Rückwärtsinduktion.
- Bewerten heißt vergleichen: Die Preise von Aktie und Anleihe dienen als Vergleichsobjekte zur Ableitung des Optionspreises. Ohne das Vorhandensein von Vergleichsobjekten, deren Marktpreise und Zahlungsprofile bekannt sind, ist keine Bewertung der Option möglich!