Prof. Dr. Arnd Wiedemann
Methodische Grundlagen des Controlling und Risikomanagements

Lehrstuhl für Finanz- und Bankmanagement

Universität Siegen

Agenda

Teil A: Finanzmathematisches Basiswissen

Teil B: Grundlagen der Bewertung von Finanzinstrumenten

Teil C: Methodische Grundlagen der Portfoliotheorie

Agenda

Agenda

Zinsbegriffe

- **Nominalzins:**
  Preis für eine Geldaufnahme bzw. Ertrag für eine Geldanlage für die Zeitperiode von einem Jahr (z.B. 4,20 % p.a.).

- **Kuponzinssätze (Par Rates, i):**
  Zinssätze von klassischen festverzinslichen Anleihen (Straight Bonds).

- **Nullkuponzinssätze (Zero Rates, z):**
  Zinssätze, die den Zinseszinseffekt bei mehrperiodischen Anlagestrategien integrieren und die Auszahlung von zwischenzeitlichen Zinsen ausschließen.

Bei einem Kuponzinssatz fallen regelmäßig Zinszahlungen an

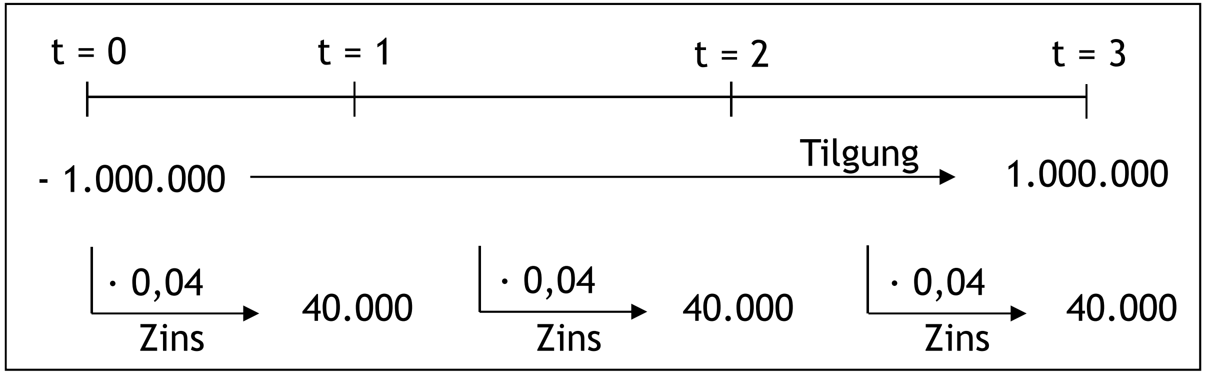
- Laufzeit einer Anleihe: 3 Jahre, Kuponzinssatz: 4,00%, Tilgung: endfällig

  Nominalvolumen: 1.000.000 EUR

- Der Kuponzinssatz wird (wenn nicht anders angegeben) jährlich gezahlt. Es fällt somit zum Ende jeden Jahres eine Zahlung in Höhe von

$$i \cdot NV = 0{,}04 \cdot 1.000.000 = 40.000 \text{ EUR}$$

  an, die Rückzahlung des Nominalvolumens erfolgt am Ende der Laufzeit.



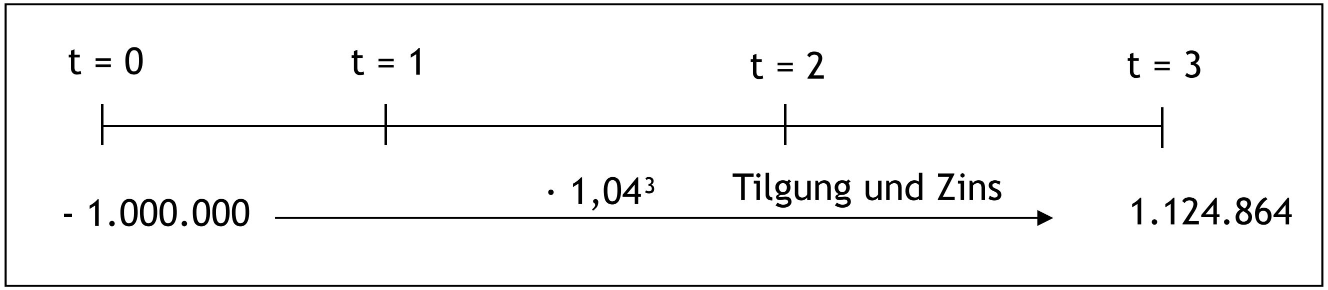
Bei einem Nullkuponzinssatz gibt es hingegen nur zwei Zahlungszeitpunkte

- Laufzeit der Anleihe: 3 Jahre, Nullkuponzinssatz: 4,00%, Tilgung: endfällig

  Nominalvolumen: 1.000.000 EUR

- Das besondere an einem Nullkuponzinssatz ist, dass keine zwischenzeitlichen Zahlungen anfallen. Somit wird die gesamte Zinszahlung, zusammen mit dem Rückzahlungsbetrag, am Ende der Laufzeit beglichen. Die Höhe dieser Auszahlung beträgt

$$(1+i)^{LZ} \cdot NV = 1{,}04^3 \cdot 1.000.000 = 1.124.864 \text{ EUR}$$



Der Preis einer Anleihe entspricht seinem Barwert

- Zur Bestimmung des aktuellen Werts (des Barwerts) müssen alle zukünftigen Zahlungen auf den heutigen Zeitpunkt transformiert werden:

Nullkuponanleihe

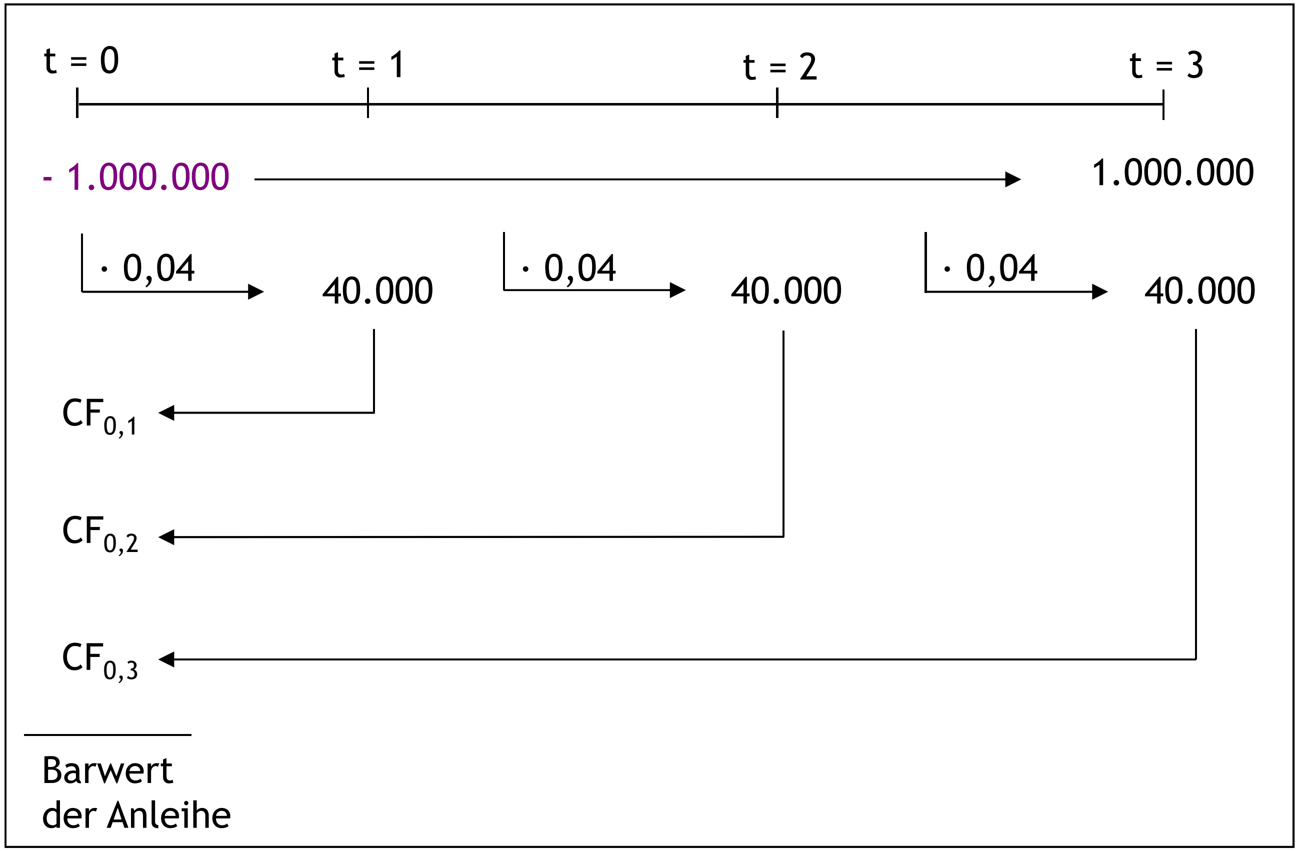
t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
- 1.000.000			1.124.864

$$-1.000.000 \xrightarrow{\cdot\, 1{,}04^{3}} 1.124.864$$

$CF_{0,3}$

= Barwert der Anleihe

Bei der Kuponanleihe müssen alle Zahlungszeitpunkte einzeln betrachtet werden



Transformation von zukünftigen Zahlungen auf den heutigen Zeitpunkt mit Nullkuponzinssätzen (I)

- Die aktuelle Zinsstrukturkurve (Nullkuponzinssätze) möge wie folgt lauten:

  1-Jahreszinssatz z(0,1): 5,00%, 2-Jahreszinssatz z(0,2): 6,03%, 3-Jahreszinssatz z(0,3): 7,10%

- Nullkuponanleihe, 1 Jahr Laufzeit, Nullkuponzinssatz 4,00%

t = 0 | t = 1

- 1.000.000,00 $\xrightarrow{\cdot\, 1{,}04^{1}}$ 1.040.000

990.476,19 $\xleftarrow{\cdot\, 1{,}05^{-1}}$ 1.040.000

- Nullkuponanleihe, 2 Jahre Laufzeit, Nullkuponzinssatz 4,00%

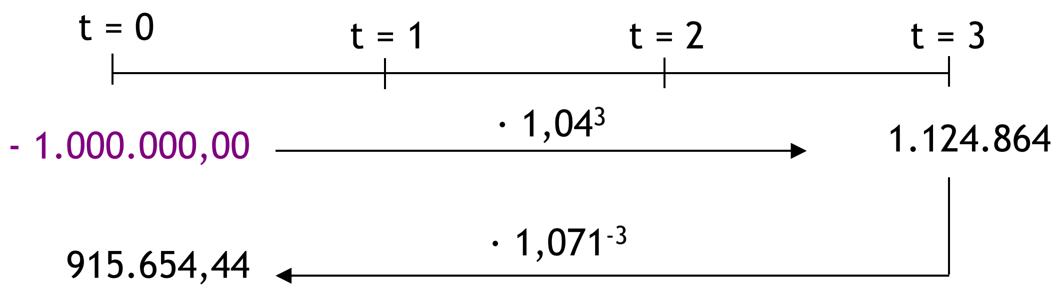
t = 0 | t = 1 | t = 2

- 1.000.000,00 $\xrightarrow{\cdot\, 1{,}04^{2}}$ 1.081.600

962.075,50 $\xleftarrow{\cdot\, 1{,}0603^{-2}}$ 1.081.600

Transformation von zukünftigen Zahlungen auf den heutigen Zeitpunkt mit Nullkuponzinssätzen (II)

- Nullkuponanleihe, 3 Jahre Laufzeit, Nullkuponzinssatz 4,00%



- Für die Abzinsung einer Zahlung zum Zeitpunkt LZ auf heute gilt folgende Formel:

$$CF_0 = \frac{CF_{LZ}}{(1+z(0,LZ))^{LZ}}$$

Auch Kuponanleihen können mit Nullkuponzinssätzen abgezinst werden

- Unter der Annahme, dass Kuponanleihen synthetisch aus Nullkuponanleihen zusammengesetzt werden können, wird wie folgt abgezinst:

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
- 1.000.000,00	40.000	40.000	1.040.000

38.095,24 $\leftarrow$ $\cdot\ 1{,}05^{-1}$ (40.000)

35.579,72 $\leftarrow$ $\cdot\ 1{,}0603^{-2}$ (40.000)

846.574,00 $\leftarrow$ $\cdot\ 1{,}0710^{-3}$ (1.040.000)

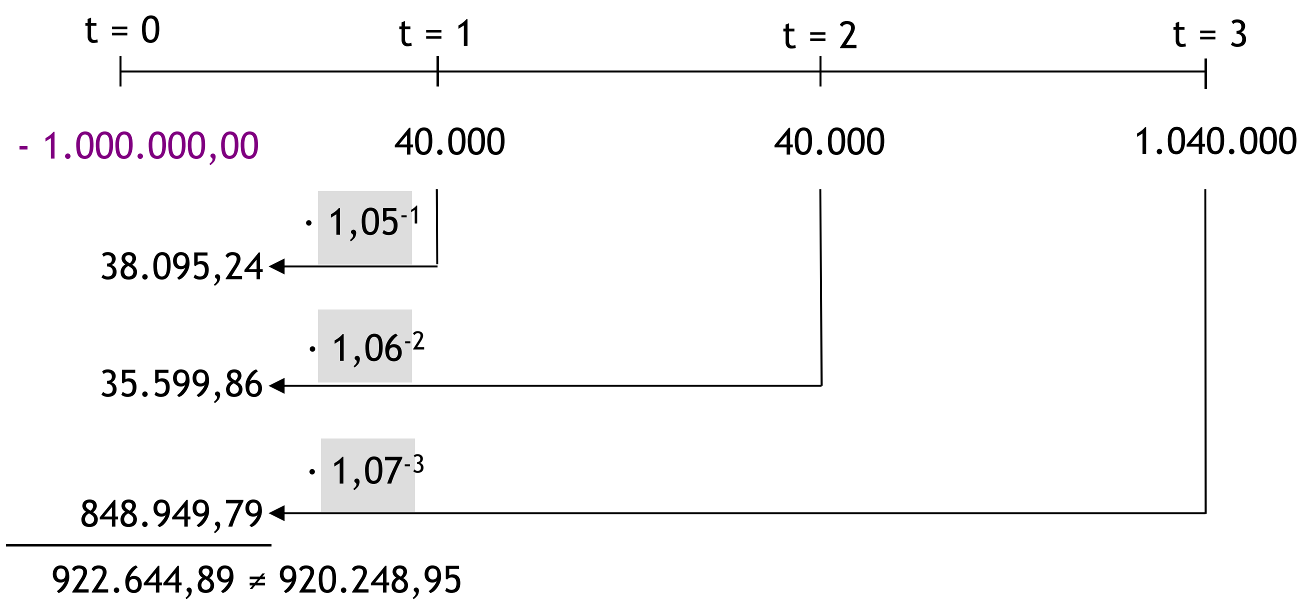
920.248,95

- Die Anleihe kann zum heutigen Zeitpunkt für 920.248 EUR erworben werden. Bei einem Nominalvolumen von 1 Mio. EUR entspricht das einem Kurs von $\frac{920.248{,}95}{1.000.000} = 92{,}02\%$.

Die Methodik kann jedoch nicht direkt auf Kuponzinssätze übertragen werden

- Zinsstrukturkurve Kuponzinssätze:

  1-Jahreszinssatz i(0,1): 5,00%, 2-Jahreszinssatz i(0,2): 6,00%, 3-Jahreszinssatz i(0,3): 7,00%



- falsche Barwertermittlung!

Die Ursache liegt in den zwischenzeitlichen Zahlungen

- Die Zahlung von 1.040.000 EUR wird im Fall der Nullkuponzinssätze mit einem Zinssatz von 7,10% abgezinst. Sämtliche zwischenzeitlichen Zahlungen werden zu diesem Zinssatz wieder angelegt, so dass es nur einen Zahlungszeitpunkt gibt.
- Der Kuponzinssatz von 7,00% geht hingegen von zwischenzeitlichen Zahlungen aus. Diese werden jedoch, abweichend zu oben, mit den laufzeitadäquaten Zinssätzen von 5,00% und 6,00% angelegt.
- Diese sogenannte Wiederanlageprämisse wird nur dann nicht verletzt, wenn der Spezialfall einer flachen Zinsstrukturkurve vorliegt:

  Der aktuelle Kuponzinssatz möge, unabhängig von der Restlaufzeit, bei 7,0412% liegen

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
- 1.000.000,00	40.000	40.000	1.040.000

$37.368{,}79 \leftarrow 40.000 \cdot 1{,}070412^{-1}$

$34.910{,}66 \leftarrow 40.000 \cdot 1{,}070412^{-2}$

$847.969{,}89 \leftarrow 1.040.000 \cdot 1{,}070412^{-3}$

920.249,34

Eine korrekte Barwertermittlung mit Kuponzinssätzen gelingt nur bei konsequenter Duplizierung des Zahlungsstroms

- Das Ziel ist es, den folgende Zahlungsstrom durch Geschäfte am Geld- und Kapitalmarkt zu neutralisieren:

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
- 1.000.000,00	40.000	40.000	1.040.000

- Aktuelle Zinsstrukturkurve (Kuponzinssätze): i(0,1) = 5,00%, i(0,2) = 6,00%, i(0,3) = 7,00%

- Die Duplizierung erfolgt nun rekursiv durch Geld- und Kapitalmarktgeschäfte:
  1. Aufnahme eines Geld- und Kapitalmarktgeschäfts, das die Einzahlung in t = 3 neutralisiert
  2. Berücksichtigung der dadurch entstandenen Zahlungen in t = 1 und t = 2
  3. Neutralisierung der Zahlung in t = 2 durch Aufnahme eines GKM-Geschäfts
  4. Berücksichtigung der dadurch entstandenen Zahlungen in t = 1
  5. Neutralisierung der Zahlung in t = 1
  6. Bestimmung des Barwerts durch Summierung der Zahlungen in t = 0

Die Einzahlung in t = 3 kann durch Aufnahme eines Kredits ausgeglichen werden

- Ein dreijähriger Kredit mit endfälliger Tilgung hat den folgenden Zahlungsstrom:

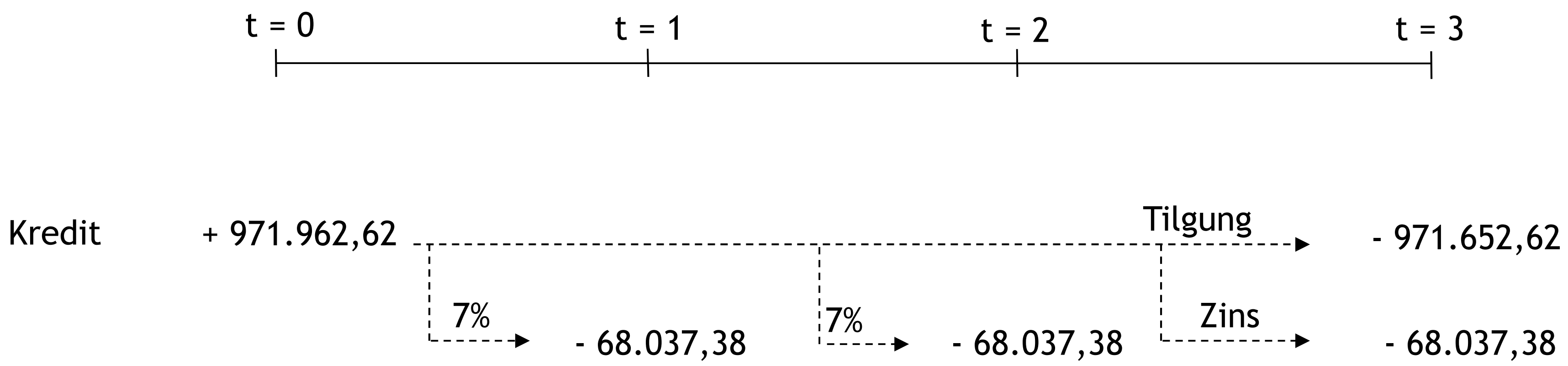
t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
+ NV	- i(0,3) · NV	- i(0,3) · NV	- NV - i(0,3) · NV

- Ausgeglichen werden soll die Zahlung in t = 3 in Höhe von 1.040.000 EUR. Dafür ist eine Auszahlung in gleicher Höhe nötig. Die Summe aus Tilgung (-NV) und Zins (-i(0,LZ)*NV) des Kredits muss also genau -1.040.000 EUR ergeben. Das Nominalvolumen, bei dem dies zutrifft, kann bei einem Zins von 7% wie folgt bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
-NV + (-0{,}07 \cdot NV) &= -1.040.000 \\
\Leftrightarrow \quad -1{,}07 \cdot NV &= -1.040.000 \\
\Leftrightarrow \quad NV &= 971.962{,}62
\end{aligned}
$$

Die Zahlung in t = 3 ist nun neutralisiert, jedoch fallen zwischenzeitliche Zahlungen an

- Für den gesamten Cash Flow folgt daraus:



- Im nächsten Schritt wird t = 2 betrachtet

Die Zahlung in t = 3 ist nun neutralisiert, jedoch fallen zwischenzeitliche Zahlungen an

- Für den gesamten Cash Flow folgt daraus:

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Anleihe	- 1.000.000,00	40.000	40.000	1.040.000
Kredit	+ 971.962,62			Tilgung: - 971.652,62
		7%: - 68.037,38	7%: - 68.037,38	Zins: - 68.037,38
		- 28.037,38	- 28.037,38	0

- Im nächsten Schritt wird t = 2 betrachtet

Zu neutralisieren ist die Zahlung in t = 2 in Höhe von -28.037,38 EUR

- Um diese Zinszahlung auszugleichen, muss eine Einzahlung in eben dieser Höhe erzeugt werden.
  - benötigt wird eine zweijährige Anleihe, dessen Zins- und Tilgungszahlung im zweiten Jahr insgesamt +28.037,38 EUR betragen (2-Jahres-Kuponzinssatz: 6,00%)

$$\begin{aligned} & NV + (0{,}06 \cdot NV) = 28.037{,}38 \\ \Leftrightarrow\quad & 1{,}06 \cdot NV = 28.037{,}38 \\ \Leftrightarrow\quad & NV = 26.450{,}36 \end{aligned}$$

- Der gesamte Zahlungsstrom lautet:

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Anleihe, 2 J.	- 26.450,36		Tilgung + 26.450,36	
		6% + 1.587,02	6% + 1.587,02	

Zu neutralisieren ist die Zahlung in t = 2 in Höhe von -28.037,38 EUR

- Um diese Zinszahlung auszugleichen, muss eine Einzahlung in eben dieser Höhe erzeugt werden.
  - benötigt wird eine zweijährige Anleihe, dessen Zins- und Tilgungszahlung im zweiten Jahr insgesamt +28.037,38 EUR betragen (2-Jahres-Kuponzinssatz: 6,00%)

$$
\begin{aligned}
& NV + (0{,}06 \cdot NV) &= 28.037{,}38 \\
\Leftrightarrow \quad & 1{,}06 \cdot NV &= 28.037{,}38 \\
\Leftrightarrow \quad & NV &= 26.450{,}36
\end{aligned}
$$

- Der gesamte Zahlungsstrom lautet:

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Anleihe, 3 J.	- 1.000.000,00	40.000	40.000	1.040.000
Kredit, 3 J.	+ 971.962,62	- 68.037,38	- 68.037,38	- 1.040.000
				0
Anleihe, 2 J.	- 26.450,36		Tilgung: + 26.450,36	
		6%: + 1.587,02	6%: + 1.587,02	
		- 26.450,36	0 (Rundungsdifferenz)	

Die Zahlung in t = 1 wird zuletzt betrachtet

- Zahlungen in t = 1:

Zinsertrag Anleihe (3 J.)	40.000
Zinsaufwand Kredit (3 J.)	- 68.037,38
Zinsertrag Anleihe (2 J.)	+ 1.587,02
Summe	- 26.450,36

- Auch diese Auszahlung kann durch eine Einzahlung neutralisiert werden, die aus einer Anleihe generiert wird. Der Kuponzinssatz für 1 Jahr beträgt 5%.

$$
\begin{aligned}
& NV + 0{,}05 \cdot NV = 26.450{,}36 \\
\Leftrightarrow \quad & 1{,}05 \cdot NV = 26.450{,}36 \\
\Leftrightarrow \quad & NV = 25.190{,}82
\end{aligned}
$$

- Der Zahlungsstrom dieser Anleihe lautet:

t = 0		t = 1
- 25.190,82	$\xrightarrow{\cdot 1{,}05}$	+ 26.450,36

Im Ergebnis sind alle Zahlungen neutralisiert worden und der Barwert kann abgelesen werden

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Anleihe, 3 J.	- 1.000.000,00	40.000	40.000	1.040.000
Kredit, 3 J.	+ 971.962,62	- 68.037,38	- 68.037,38	- 1.040.000
				0
Anleihe, 2 J.	- 26.450,36	+ 1.587,02	+ 28.037,36	
			0 (Rundungsdifferenz)	
Anleihe, 1 J.	- 25.190,82	+ 26.450,36		
	920.321,44	0		

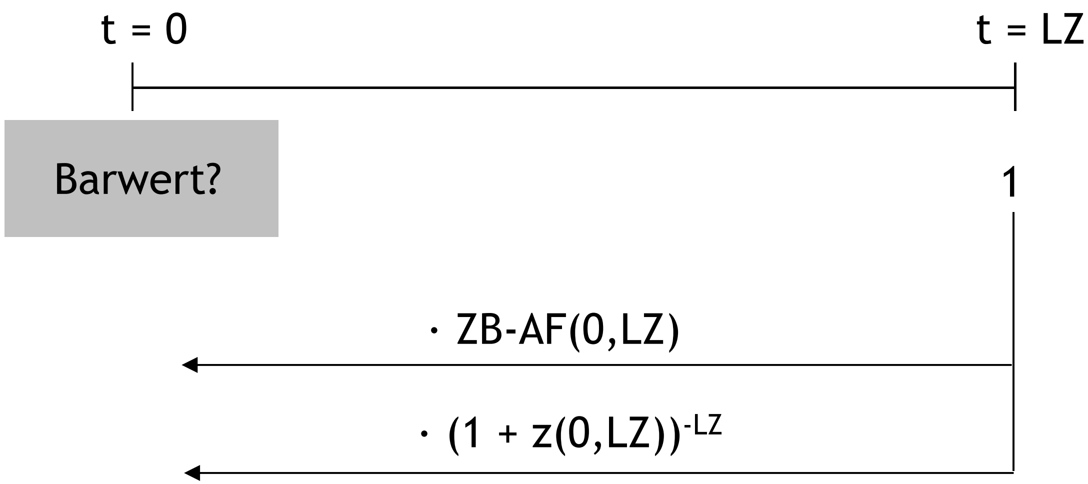
- Die Differenz zur Berechnung über Nullkuponzinssätzen (72,49 EUR) ist auf Rundungsdifferenzen zurück zu führen.
- Nur mittels einer solchen Berechnung kann der Barwert korrekt aus Kuponzinssätzen bestimmt werden!

Eine weitere Möglichkeit zur Abzinsung bieten die Zerobond-Abzinsfaktoren

- Beantworten die Fragen:
  1. Wieviel ist 1 EUR, der in LZ Jahren gezahlt wird, heute wert?
  2. Welchen Betrag muss ich heute anlegen, um in LZ Jahren eine Zahlung von 1 EUR zu erhalten?

Eine weitere Möglichkeit zur Abzinsung bieten die Zerobond-Abzinsfaktoren

- Beantworten die Fragen:
  1. Wieviel ist 1 EUR, der in LZ Jahren gezahlt wird, heute wert?
  2. Welchen Betrag muss ich heute anlegen, um in LZ Jahren eine Zahlung von 1 EUR zu erhalten?



Zerobond-Abzinsfaktoren und Nullkuponzinssätze stehen in einem direkten Zusammenhang

- In beiden Fällen werden keine zwischenzeitlichen Zahlungen vorgenommen, sämtliche Zinseszinseffekte sind integriert
- Können unmittelbar umgerechnet werden:

$$z(t,LZ) = \text{ZB-AF}(t,LZ)^{-\frac{1}{LZ}} - 1 \qquad \text{ZB-AF}(t,LZ) = \left(1 + z(t,LZ)\right)^{-LZ}$$

- Entsprechend gilt:

t = 0 — t = 1

$0{,}9524 \xleftarrow{\cdot\, 1{,}05^{-1}} 1$

t = 0 — t = 1 — t = 2

$0{,}8895 \xleftarrow{\cdot\, 1{,}0603^{-2}} 1$

t = 0 — t = 1 — t = 2 — t = 3

$0{,}8141 \xleftarrow{\cdot\, 1{,}071^{-3}} 1$

(Rundungsdifferenz)

Der Barwert kann unmittelbar berechnet werden

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
- 1.000.000	40.000	40.000	1.040.000

38.096 ← · 0,9524 (t = 1)

35.580 ← · 0,8895 (t = 2)

846.664 ← · 0,8141 (t = 3)

920.340

- Zerobond-Abzinsfaktoren sind normiert auf eine Auszahlung von 1 EUR nach LZ Jahren. Durch Duplizierung des Zahlungsstrom können ZB-AFs aus Kuponzinssätzen bestimmt werden.

Bestimmung des zweijährigen Zerobond-Abzinsfaktors aus Kuponzinssätzen

- Der Zahlungsstrom, der durch die Duplizierung neutralisiert werden soll, sieht wie folgt aus:

t = 0	t = 1	t = 2
Barwert?	0	1

- Auch hier wird rekursiv vorgegangen, d.h. im ersten Schritt wird lediglich t = 2 betrachtet
  - Gesucht ist ein Geschäft am GKM, das eine Auszahlung von 1 EUR erzeugt, d.h. es wird ein Kredit benötigt, dessen Summe aus Zins und Tilgung genau 1 EUR beträgt
  - Das Nominalvolumen des Kredits kann wie gewohnt bestimmt werden. Der Kuponzinssatz für 2 Jahre beträgt 6,00%.

$$
\begin{aligned}
& -NV + (-0{,}06 \cdot NV) = -1 \\
\Leftrightarrow \quad & -1{,}06 \cdot NV = -1 \\
\Leftrightarrow \quad & NV = 0{,}9434
\end{aligned}
$$

  - Da es sich um einen Kuponzins handelt, fällt nun aber in t = 1 eine Zinszahlung in Höhe von an.

$$0{,}9434 \cdot 0{,}06 = 0{,}0566 \text{ EUR}$$

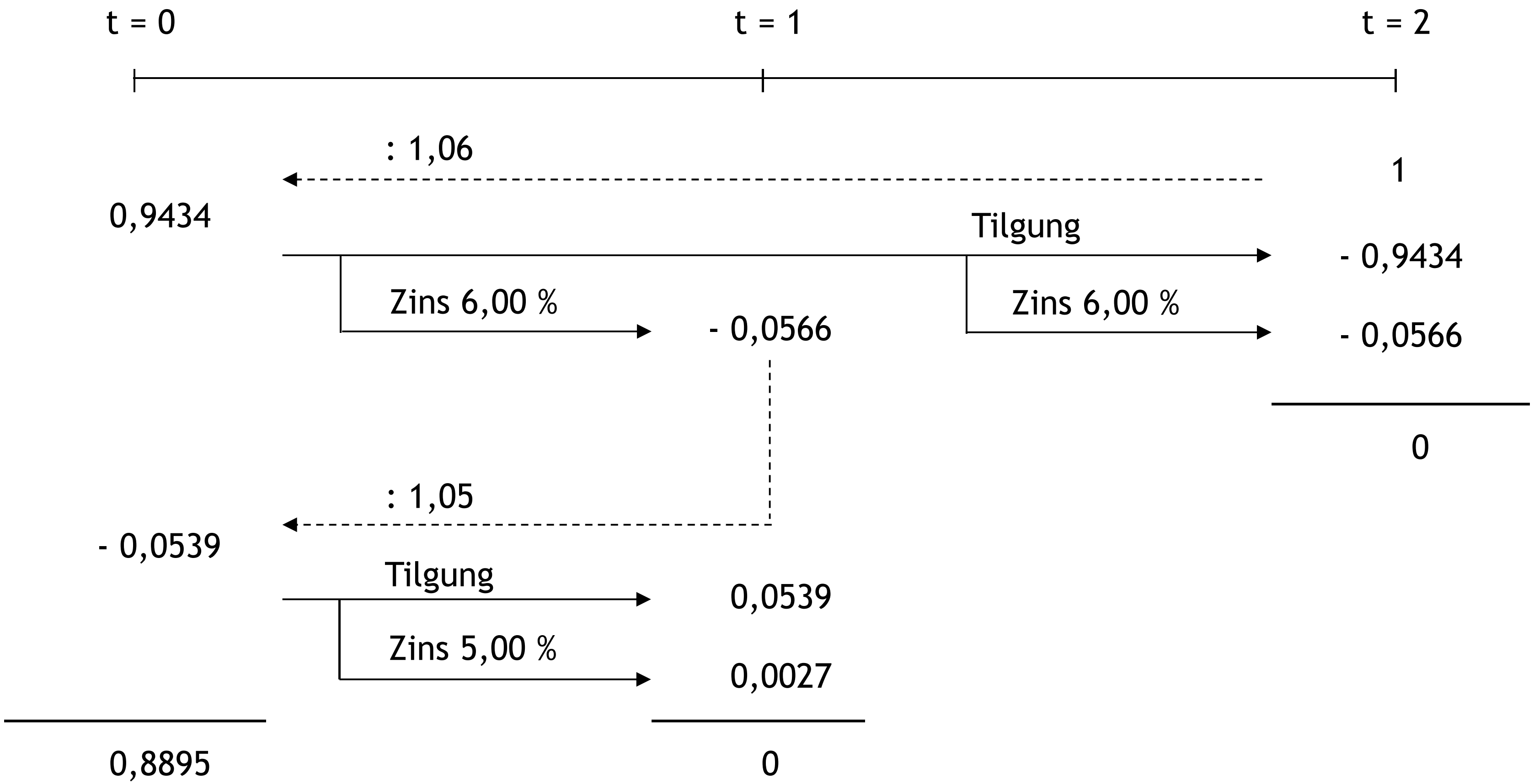
Die zu leistende Zinszahlung in t = 1 kann durch eine Anleihe refinanziert werden

	t = 0	t = 1	t = 2
	Barwert?	0	1
Kredit, 2 J.	0,9434		Tilgung: - 0,9434
		6%: - 0,0566	Zins: - 0,0566
		- 0,0566	0
Anleihe, 1J.	- 0,0539	Tilgung: + 0,0539	
		Zins: + 0,0027	
	0,8895 = ZB-AF(0,2)	0	

Berechnung des benötigten Nominalvolumens der Anleihe:

$$
\begin{aligned}
& NV + (0{,}05 \cdot NV) = 0{,}0566 \\
\Leftrightarrow \quad & 1{,}05 \cdot NV = 0{,}0566 \\
\Leftrightarrow \quad & NV = 0{,}0539
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung: Bestimmung des ZB-AF (0,2) mit Kuponzinssätzen

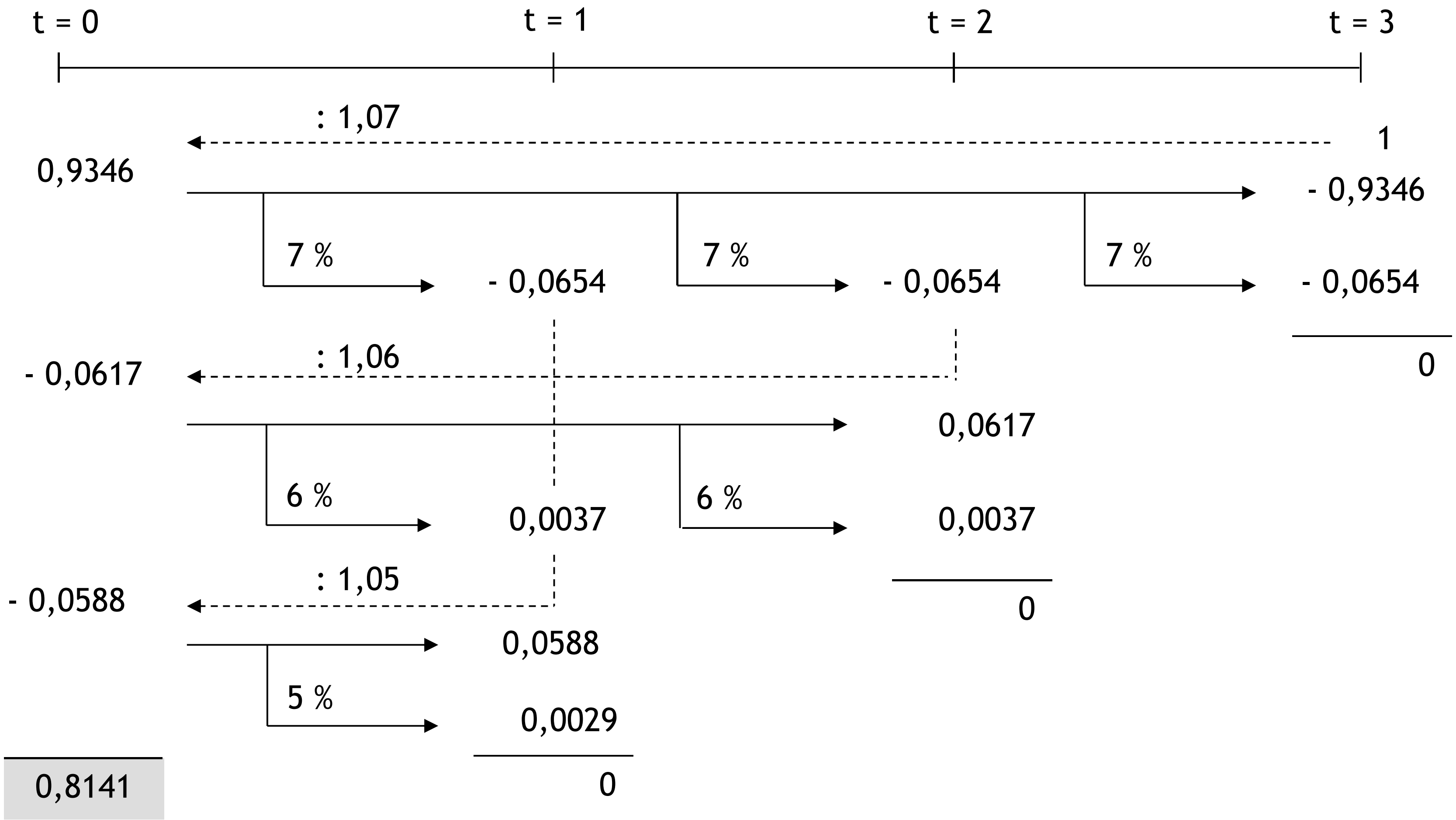


Aufgabe: Zerobond-Abzinsfaktoren

- 1. Berechnen Sie den ZB-AF(0,3) unter Verwendung der i(0,1) = 5,00%, i(0,2) = 6,00% und i(0,3) = 7,00%

- 2. Warum wird im ersten Schritt lediglich durch (1+i(0,LZ)) geteilt, und nicht durch $(1+i(0,LZ))^{LZ}$?

Lösung Frage 1: Berechnung ZB-AF(0,3) aus Kuponzinssätzen



Lösung Frage 2

- 2. Warum wird im ersten Schritt lediglich durch (1+i(0,LZ)) geteilt, und nicht durch $(1+i(0,LZ))^{LZ}$?

  - Gesucht ist das Nominalvolumen, dessen Summe aus Zins und Tilgung genau 1 ergibt. Da es sich um einen jährlich gezahlten Kuponzins handelt, beträgt die Zinszahlung immer, unabhängig von der Laufzeit, i(0,LZ)*NV. Zuzüglich der Tilgung ergibt sich der Term

$$
\begin{aligned}
(1+i(0,LZ))\cdot NV &= 1 \\
NV &= \frac{1}{1+i(0,LZ)} \\
NV &= (1+i(0,LZ))^{-1}
\end{aligned}
$$

Ergebnis Teil I

- Wir sind nun in der Lage, Barwerte auf drei verschiedene Arten zu bestimmen:
  - mit Nullkuponzinssätzen
  - mit Kuponzinssätzen
  - mit Zerobond-Abzinsfaktoren

- Außerdem ist es uns möglich, aus Kuponzinssätzen die entsprechenden
  - Zerobond-Abzinsfaktoren und daraus wiederum
  - Nullkuponzinssätze zu bestimmen

Übung Teil I

- Es gelte die folgende Kuponzinsstrukturkurve:

1 Jahr: 3,00% | 2 Jahre: 4,00% | 3 Jahre: 5,00% | 4 Jahre: 6,00%

a) Berechnen Sie die entsprechenden Zerobond-Abzinsfaktoren und Nullkuponzinssätze.

b) Bestimmen Sie den Barwert der folgenden Anleihe:

Laufzeit	4 Jahre
Kuponzinssatz	4,50%
Nominalvolumen	1.500.000
Tilgung	endfällig

c) Wie hoch ist der Kurs der Anleihe?

Lösung Übung Teil I

Jahr t	1	2	3	4
Kupon i(0,t)	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%
ZB-AF(0,t)	0,9709	0,9242	0,8621	0,7873
Nullkupon z(0,t)	3,00%	4,02%	5,07%	6,16%

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
- 1.500.000,00	67.500	67.500	67.500	1.567.500

65.535,75 ← · 0,9709

62.383,50 ← · 0,9242

58.191,75 ← · 0,8621

1.234.136,19 ← · 0,7873

1.420.247,89

$\Rightarrow$ Der Kurs der Anleihe beträgt $\frac{1.420.247,89}{1.500.000} = 94,68\%$.