

Kapitel 4 – Aktienoptionen und Optionspreismodelle Fallstudie 13: Bewertung mit dem Black/Scholes-Modell

Aufgabenteil a)

In der Aufgabenstellung ist ein aktueller Nullkuponzins für 3 Jahre in Höhe von 4,2% angegeben. Da die Optionspreisformeln üblicherweise stetige Zinsen zur Diskontierung verwenden, ist der Nullkuponzins zuerst in den korrespondierenden stetigen Zins umzurechnen:

$$r = \ln [1 + z(0,t)] = \ln (1,042) = 0,0411 = 4,11\%$$

Die Black/Scholes-Formel für **Aktien-Calloptionen** lautet:

$$C = A \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot t} \cdot N(d_2)$$

$$C = 82 \cdot N(d_1) - 110 \cdot e^{-0,0411 \cdot 3} \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(82/110) + (0,0411 + 0,55^2/2) \cdot 3}{0,55 \cdot \sqrt{3}} = 0,297376$$

$$d_2 = 0,297376 - 0,55 \sqrt{3} = -0,655252$$

Die Werte für die Quantile der Standardnormalverteilung können entweder gerundet aus der Tabelle abgelesen oder mithilfe von EXCEL exakt berechnet werden. Im Folgenden werden die Lösungen für beide Wege angegeben.

Kapitel 4 – Aktienoptionen und Optionspreismodelle Fallstudie 13: Bewertung mit dem Black/Scholes-Modell

1. Weg: Exakte Werte mit EXCEL

$$\Rightarrow N(d_1) = N(0,297376) = 0,616910$$

$$\Rightarrow N(d_2) = N(-0,655252) = 0,256153$$

$$\begin{aligned} C &= 82 \cdot 0,616910 - 110 \cdot 0,256153 \cdot e^{-0,0411 \cdot 3} \\ &= 25,68 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Der Preis der Option in $t=0$ beträgt auf Basis der exakten Werte 25,68 EUR.

2. Weg: Gerundete Werte mit Tabelle

$$\Rightarrow N(d_1) = N(0,30) = 0,6179$$

$$\Rightarrow N(d_2) = N(-0,66) = 1 - N(0,66) = 1 - 0,7454 = 0,2546$$

$$\begin{aligned} C &= 82 \cdot 0,6179 - 110 \cdot 0,2546 \cdot e^{-0,0411 \cdot 3} \\ &= 25,91 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Der Preis der Option in $t=0$ beträgt auf Basis der gerundeten Werte 25,91 EUR.

Aufgabenteil b)

Die Werte für $N(d_1)$ und $N(d_2)$ müssen an die neue (gesunkene) Volatilität angepasst werden. Statt mit 55% soll nun mit 15% gerechnet werden.

$$d_1 = \frac{\ln(82/110) + (0,0411 + 0,15^2/2) \cdot 3}{0,15 \cdot \sqrt{3}} = -0,526201$$

$$d_2 = -0,526201 - 0,15\sqrt{3} = -0,786009$$

Kapitel 4 – Aktienoptionen und Optionspreismodelle Fallstudie 13: Bewertung mit dem Black/Scholes-Modell

Die Lösungen werden erneut für beide Wege angegeben.

1. Weg: Exakte Werte mit EXCEL

$$\Rightarrow N(d_1) = N(-0,526201) = 0,299937$$

$$\Rightarrow N(d_2) = N(-0,786009) = 0,215931$$

$$\begin{aligned} C &= 82 \cdot 0,299937 - 110 \cdot 0,215931 \cdot e^{-0,0411 \cdot 3} \\ &= 3,55 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Der Preis der Option in $t=0$ beträgt auf Basis der exakten Werte 3,55 EUR.

2. Weg: Gerundete Werte mit Tabelle

$$\Rightarrow N(d_1) = N(-0,53) = 1 - N(0,53) = 1 - 0,7019 = 0,2981$$

$$\Rightarrow N(d_2) = N(-0,79) = 1 - N(0,79) = 1 - 0,7852 = 0,2148$$

$$\begin{aligned} C &= 82 \cdot 0,2981 - 110 \cdot 0,2148 \cdot e^{-0,0411 \cdot 3} \\ &= 3,56 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Durch das Absinken der Volatilität von 55% auf 15% sinkt der Callpreis (auf Basis der gerundeten Werte) von 25,91 EUR auf 3,56 EUR.

Kapitel 4 – Aktienoptionen und Optionspreismodelle Fallstudie 13: Bewertung mit dem Black/Scholes-Modell

Aufgabenteil c)

Der Aktienkurs soll sich von 82 EUR auf 84 EUR erhöht haben. Es soll erneut von einer Volatilität von 55% ausgegangen werden. Die Laufzeit der Option hat sich um ein Jahr verkürzt. Da kein Nullkuponzins für 2 Jahre angegeben wurde, wird vereinfachend angenommen, dass der dreijährige Zins von 4,2 % auch für die Laufzeit von 2 Jahren eingesetzt werden kann.

$$C = 84 \cdot N(d_1) - 110 \cdot e^{-r \cdot t} \cdot N(d_2)$$

Auf Basis der allgemeinen Formel für Aktien-Calloptionen sind nun d_1 und d_2 sowie $N(d_1)$ und $N(d_2)$ neu zu bestimmen:

$$C = 84 \cdot N(d_1) - 110 \cdot e^{-0,0411 \cdot 2} \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(84/110) + (0,0411 + 0,55^2/2) \cdot 2}{0,55 \cdot \sqrt{2}} = 0,147896$$

$$d_2 = -0,147896 - 0,55 \cdot \sqrt{2} = -0,629921$$

1. Weg: Exakte Werte mit EXCEL

$$\Rightarrow N(d_1) = N(0,147896) = 0,558788$$

$$\Rightarrow N(d_2) = N(-0,629921) = 0,264373$$

$$\begin{aligned} C &= 84 \cdot 0,558788 - 110 \cdot 0,264373 \cdot e^{-0,0411 \cdot 2} \\ &= 20,15 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Der Preis der Option in $t=1$ beträgt bei einem Aktienkurs von 84,00 EUR auf Basis der exakten Werte 20,15 EUR.

Kapitel 4 – Aktienoptionen und Optionspreismodelle

Fallstudie 13: Bewertung mit dem Black/Scholes-Modell

2. Weg: Gerundete Werte mit Tabelle

$$\Rightarrow N(d_1) = N(0,15) = 0,5596$$

$$\Rightarrow N(d_2) = N(-0,63) = 1 - N(0,63) = 1 - 0,7357 = 0,2643$$

$$\begin{aligned} C &= 84 \cdot 0,5596 - 110 \cdot e^{-0,0411 \cdot 2} \cdot 0,2643 \\ &= 20,23 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Bei einem Aktienkurs von 84,00 EUR ergibt sich für die Option in $t=1$ auf Basis der gerundeten Werte ein Wert von 20,23 EUR.