

## Kapitel 2 – Finanzmathematische Grundlagen

### Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren

#### Aufgabenteil a)

Zerobond-Abzinsfaktoren (ZB-AF):

$$\text{ZB-AF}(0,1): \quad x \cdot (1+0,035) = 1$$

$$x = \frac{1}{1,035}$$

$$x = 0,9662$$

Exakter Wert: 0,966184

**ZB-AF(0,2):**

Exakter Wert: 0,924378

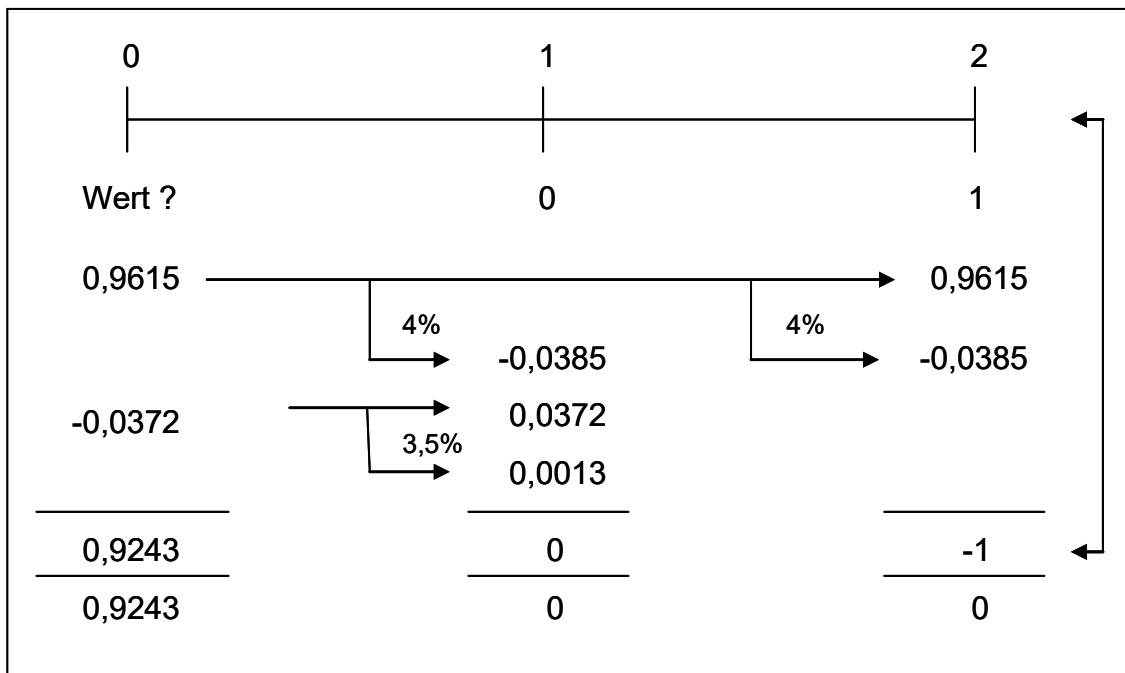


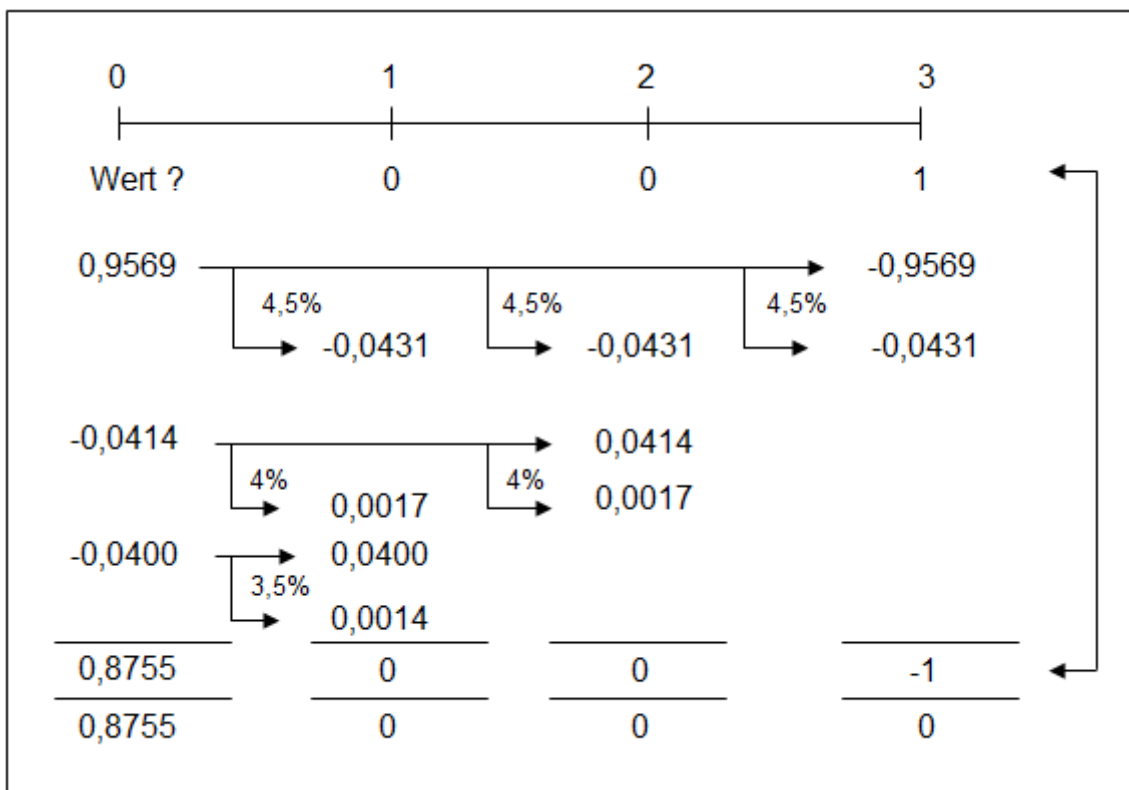
Abb. 1: Kalkulation des ZB-AF(0,2)

**Kapitel 2 – Finanzmathematische Grundlagen**

**Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren**

**ZB-AF(0,3):**

Exakter Wert: 0,875526



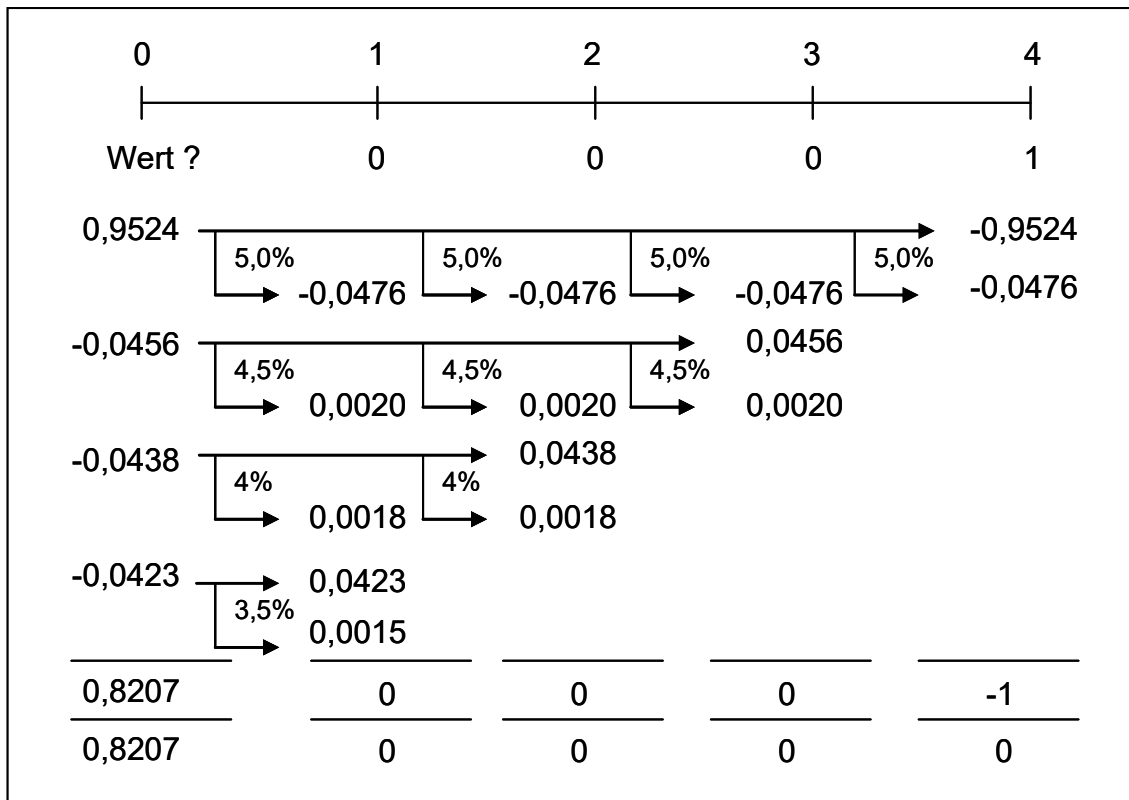
**Abb. 2: Kalkulation des ZB-AF(0,3)**

**Kapitel 2 – Finanzmathematische Grundlagen**

**Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren**

**ZB-AF(0,4):**

Exakter Wert: 0,820663



**Abb. 3: Kalkulation des ZB-AF(0,4)**

Mit Hilfe der kalkulierten Zerobond-Abzinsfaktoren können die **zukünftigen Zerobond-Abzinsfaktoren (ZB-AF)** kalkuliert werden:

$$\text{ZB - AF}(1,1): \frac{\text{ZB - AF}(0,2)}{\text{ZB - AF}(0,1)} = \frac{0,9243}{0,9662} = 0,9566 \quad (\text{Exakt: } 0,956731)$$

$$\text{ZB - AF}(1,2): \frac{\text{ZB - AF}(0,3)}{\text{ZB - AF}(0,1)} = \frac{0,8755}{0,9662} = 0,9061 \quad (\text{Exakt: } 0,906169)$$

## Kapitel 2 – Finanzmathematische Grundlagen

### Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren

$$\text{ZB} - \text{AF}(1,3): \frac{\text{ZB} - \text{AF}(0,4)}{\text{ZB} - \text{AF}(0,1)} = \frac{0,8207}{0,9662} = 0,8494 \quad (\text{Exakt: } 0,849386)$$

$$\text{ZB} - \text{AF}(2,1): \frac{\text{ZB} - \text{AF}(0,3)}{\text{ZB} - \text{AF}(0,2)} = \frac{0,8755}{0,9243} = 0,9472 \quad (\text{Exakt: } 0,947152)$$

$$\text{ZB} - \text{AF}(2,2): \frac{\text{ZB} - \text{AF}(0,4)}{\text{ZB} - \text{AF}(0,2)} = \frac{0,8207}{0,9243} = 0,8879 \quad (\text{Exakt: } 0,887800)$$

$$\text{ZB} - \text{AF}(3,1): \frac{\text{ZB} - \text{AF}(0,4)}{\text{ZB} - \text{AF}(0,3)} = \frac{0,8207}{0,8755} = 0,9374 \quad (\text{Exakt: } 0,937336)$$

Mit den ermittelten Zerobond-Abzinsfaktoren lassen sich jetzt die **Zerobond-Aufzinsfaktoren (ZB-UF)** für sämtliche Laufzeiten berechnen:

Zerobond-Aufzinsfaktoren:

$$\text{ZB} - \text{UF}(0,1): \frac{1}{\text{ZB} - \text{AF}(0,1)} = \frac{1}{0,9662} = 1,0350$$

$$\text{ZB} - \text{UF}(0,2): \frac{1}{\text{ZB} - \text{AF}(0,2)} = \frac{1}{0,9243} = 1,0819 \quad (\text{Exakt: } 1,081809)$$

$$\text{ZB} - \text{UF}(0,3): \frac{1}{\text{ZB} - \text{AF}(0,3)} = \frac{1}{0,8755} = 1,1422 \quad (\text{Exakt: } 1,142170)$$

$$\text{ZB} - \text{UF}(0,4): \frac{1}{\text{ZB} - \text{AF}(0,4)} = \frac{1}{0,8207} = 1,2185 \quad (\text{Exakt: } 1,218528)$$

## Kapitel 2 – Finanzmathematische Grundlagen

### Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren

$$ZB - UF(1,1): \frac{ZB - UF(0,2)}{ZB - UF(0,1)} = \frac{1,0819}{1,0350} = 1,0453 \quad (\text{Exakt: } 1,045226)$$

$$ZB - UF(1,2): \frac{ZB - UF(0,3)}{ZB - UF(0,1)} = \frac{1,1422}{1,0350} = 1,1036 \quad (\text{Exakt: } 1,103546)$$

$$ZB - UF(1,3): \frac{ZB - UF(0,4)}{ZB - UF(0,1)} = \frac{1,2185}{1,0350} = 1,1773 \quad (\text{Exakt: } 1,177321)$$

$$ZB - UF(2,1): \frac{ZB - UF(0,3)}{ZB - UF(0,2)} = \frac{1,1422}{1,0819} = 1,0557 \quad (\text{Exakt: } 1,055797)$$

$$ZB - UF(2,2): \frac{ZB - UF(0,4)}{ZB - UF(0,2)} = \frac{1,2185}{1,0819} = 1,1263 \quad (\text{Exakt: } 1,126390)$$

$$ZB - UF(3,1): \frac{ZB - UF(0,4)}{ZB - UF(0,3)} = \frac{1,2185}{1,1422} = 1,0668 \quad (\text{Exakt: } 1,066853)$$

## Kapitel 2 – Finanzmathematische Grundlagen

### Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren

#### Aufgabenteil b)

Aus der kalkulatorischen Dreiecksbeziehung zwischen Zerobond-Auf- und -Abzinsfaktoren sowie den Nullkuponzinsen lassen sich die Nullkuponzinsen jetzt aus den in Aufgabenteil

a) berechneten Werten kalkulieren:

$$\begin{aligned}z(0,1): \quad & \text{ZB-UF}(0,1) = (1 + z)^1 \\ & 1,0350 = 1 + z \\ & z = 0,035 = 3,5 \%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z(0,2): \quad & \text{ZB-UF}(0,2) = (1 + z)^2 \\ & 1,0819 = (1 + z)^2 \\ & z = \sqrt{1,0819} - 1 \\ & z = 0,0401 = 4,01 \%\end{aligned}$$

Exakt: 4,01005 %

$$\begin{aligned}z(0,3): \quad & \text{ZB-UF}(0,3) = (1 + z)^3 \\ & 1,1422 = (1 + z)^3 \\ & z = \sqrt[3]{1,1422} - 1 \\ & z = 0,0453 = 4,53 \%\end{aligned}$$

Exakt: 4,530647 %

## Kapitel 2 – Finanzmathematische Grundlagen

### Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren

$$z(0,4): \quad \text{ZB-UF}(0,4) = (1 + z)^4$$

$$1,2185 = (1 + z)^4$$

$$z = \sqrt[4]{1,2185} - 1$$

$$z = 0,0506 = 5,06 \%$$

$$\text{Exakt: } 5,06519 \%$$

#### Kalkulation zukünftiger Nullkuponzinssätze:

$$z(1,1): \quad \text{ZB-UF}(1,1) = [1 + z(1,1)]$$

$$1,0453 = 1 + z(1,1)$$

$$z(1,1) = 1,0453 - 1 = 0,0453 = 4,53 \%$$

$$\text{Exakt: } 4,522613 \%$$

$$z(1,2): \quad \text{ZB-UF}(1,2) = [1 + z(1,2)]^2$$

$$1,1036 = [1 + z(1,2)]^2$$

$$z(1,2) = \sqrt{1,1036} - 1$$

$$z(1,2) = 0,0505 = 5,05 \%$$

$$\text{Exakt: } 5,049813 \%$$

$$z(1,3): \quad \text{ZB-UF}(1,3) = [1 + z(1,3)]^3$$

$$1,1773 = [1 + z(1,3)]^3$$

$$z(1,3) = \sqrt[3]{1,1773} - 1$$

$$z(1,3) = 0,0559 = 5,59 \%$$

$$\text{Exakt: } 5,592163 \%$$

## Kapitel 2 – Finanzmathematische Grundlagen

### Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren

$$\begin{aligned}z(2,1): \quad ZB-UF(,1) &= [1 + z(2,1)] \\1,0557 &= 1 + z(1,2) \\z(2,1) &= 1,0557 - 1 \\z(2,1) &= 0,0557 = 5,57 \%\end{aligned}$$

Exakt: 5,579672 %

$$\begin{aligned}z(2,2): \quad ZB-UF(2,2) &= [1 + z(2,2)]^2 \\1,1263 &= [1 + z(2,2)]^2 \\z(2,2) &= \sqrt{1,1263} - 1 \\z(2,2) &= 0,0613 = 6,13 \%\end{aligned}$$

Exakt: 6,131035 %

$$\begin{aligned}z(3,1): \quad ZB-UF(3,1) &= [1 + z(3,1)] \\1,0668 &= 1 + z(3,1) \\z(3,1) &= 1,0668 - 1 \\z(3,1) &= 0,0668 = 6,68 \%\end{aligned}$$

Exakt: 6,685277 %



## Kapitel 2 – Finanzmathematische Grundlagen

### Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren

#### Aufgabenteil c)

Kalkulation der zukünftigen Forward-Zinssätze ( $i(t, LZ)$ ):

$$i(1,1) = \frac{1 - ZB - AF(1,1)}{ZB - AF(1,1)} = \frac{1 - 0,9566}{0,9566} = 0,0454 = 4,54 \%$$

Exakt: 4,522613 %

$$i(1,2) = \frac{1 - ZB - AF(1,2)}{ZB - AF(1,1) + ZB - AF(1,2)} = \frac{1 - 0,9061}{0,9566 + 0,9061} = 0,0504 = 5,04 \%$$

Exakt: 5,036797 %

$$i(1,3) = \frac{1 - ZB - AF(1,3)}{ZB - AF(1,1) + ZB - AF(1,2) + ZB - AF(1,3)} = \frac{1 - 0,8494}{0,9566 + 0,9061 + 0,8494} = 0,0555 = 5,55 \%$$

Exakt: 5,553039 %

$$i(2,1) = \frac{1 - ZB - AF(2,1)}{ZB - AF(2,1)} = \frac{1 - 0,9472}{0,9472} = 0,0557 = 5,57 \%$$

Exakt: 5,579672 %

$$i(2,2) = \frac{1 - ZB - AF(2,2)}{ZB - AF(2,1) + ZB - AF(2,2)} = \frac{1 - 0,8879}{0,9472 + 0,8879} = 0,0611 = 6,11 \%$$

Exakt: 6,114594 %

$$i(3,1) = \frac{1 - ZB - AF(3,1)}{ZB - AF(3,1)} = \frac{1 - 0,9374}{0,9374} = 0,0668 = 6,68 \%$$

Exakt: 6,685277 %