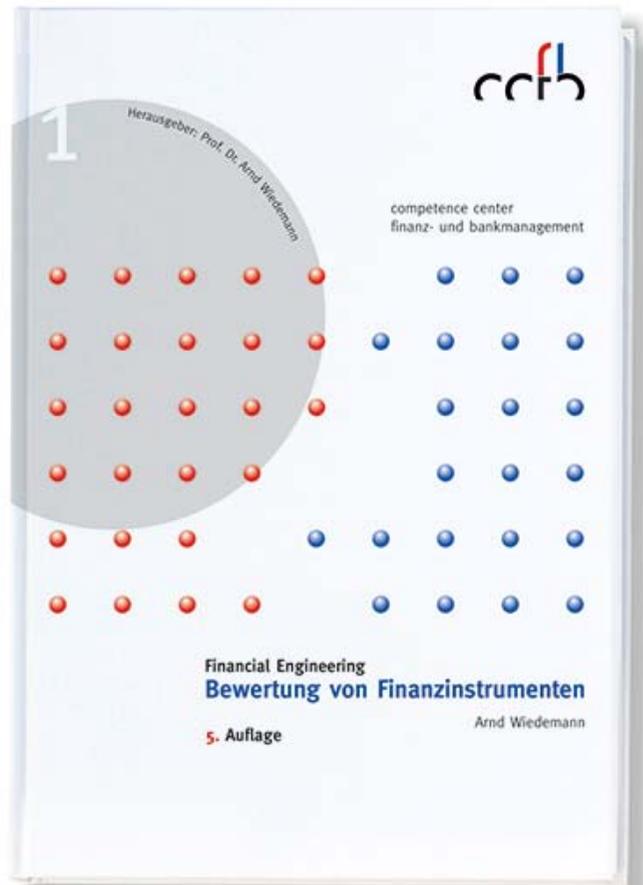


Prof. Dr. Arnd Wiedemann

Finanzmathematisches Basiswissen



Literatur zur Vertiefung der Finanzmathematik



Financial Engineering

Bewertung von Finanzinstrumenten

Financial Engineering ist die Kunst der zielgerichteten Kon- struktion neuer Finanzprodukte aus gegebenen Basisin- strumenten. Voraussetzung ist die Kenntnis der Zahlungs- ströme der Basisinstrumente und deren Bewertung. Dieses Buch erläutert sowohl die Wirkungsweise und das Pricing der relevanten symmetrischen und asymmetrischen (optio- nalen) Basisinstrumente als auch eine Vielzahl aktueller Finanzprodukte, die spezielle Investorenziele und Anlage- erwartungen erfüllen.

Arnd Wiedemann

Financial Engineering

Bewertung von Finanzinstrumenten

5. Auflage 2009

539 Seiten, gebunden, 49,90 EUR

ISBN 3-933165-68-7

Agenda

- Finanzmathematische Grundbegriffe
- Varianten der Barwertbestimmung
- Berechnung von Zinssätzen bei beliebigen Startzeitpunkten und Laufzeiten
- Statistische Grundlagen

Agenda

- Finanzmathematische Grundbegriffe
 - Varianten der Barwertbestimmung
 - Berechnung von Zinssätzen bei beliebigen Startzeitpunkten und Laufzeiten
 - Statistische Grundlagen
- } 1. Termin
2. Termin
3. Termin

Zinsbegriffe

- ▶ **Nominalzins:**
Preis für eine Geldaufnahme bzw. Ertrag für eine Geldanlage für die Zeitperiode von einem Jahr (z.B. 4,20 % p.a.).

- ▶ **Kuponzinssätze (Par Rates, i):**
Zinssätze von klassischen festverzinslichen Anleihen (Straight Bonds).

- ▶ **Nullkuponzinssätze (Zero Rates, z):**
Zinssätze, die den Zinseszinsseffekt bei mehrperiodischen Anlagestrategien integrieren und die Auszahlung von zwischenzeitlichen Zinsen ausschließen.

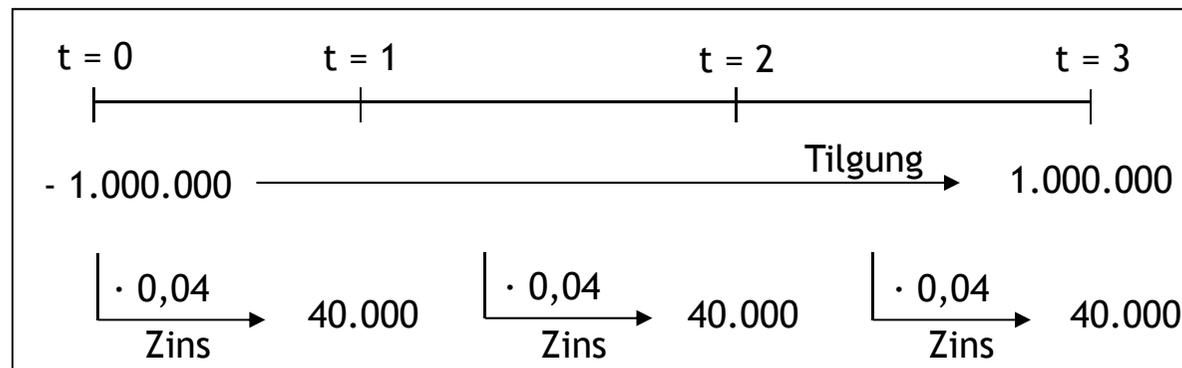
Bei einem Kuponzinssatz fallen regelmäßig Zinszahlungen an

▶ Laufzeit einer Anleihe: 3 Jahre, Kuponzinssatz: 4,00%, Tilgung: endfällig
Nominalvolumen: 1.000.000 EUR

▶ Der Kuponzinssatz wird (wenn nicht anders angegeben) jährlich gezahlt. Es fällt somit zum Ende jedes Jahres eine Zahlung in Höhe von

$$i \cdot NV = 0,04 \cdot 1.000.000 = 40.000 \text{ EUR}$$

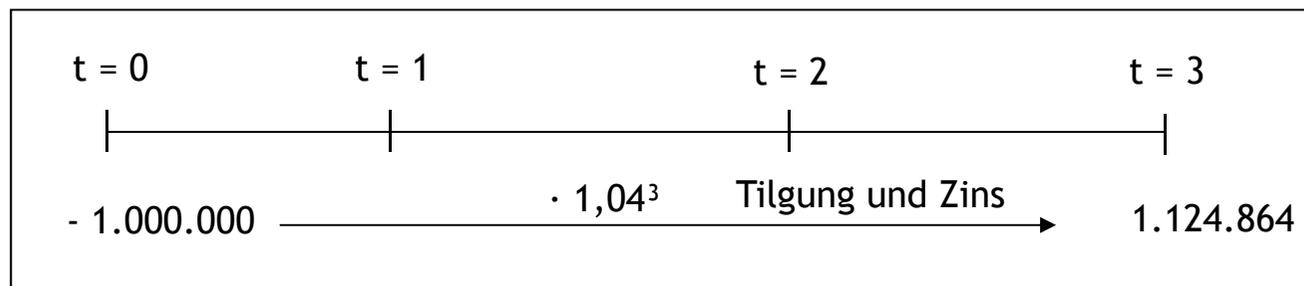
an, die Rückzahlung des Nominalvolumens erfolgt am Ende der Laufzeit.



Bei einem Nullkuponzinssatz gibt es hingegen nur zwei Zahlungszeitpunkte

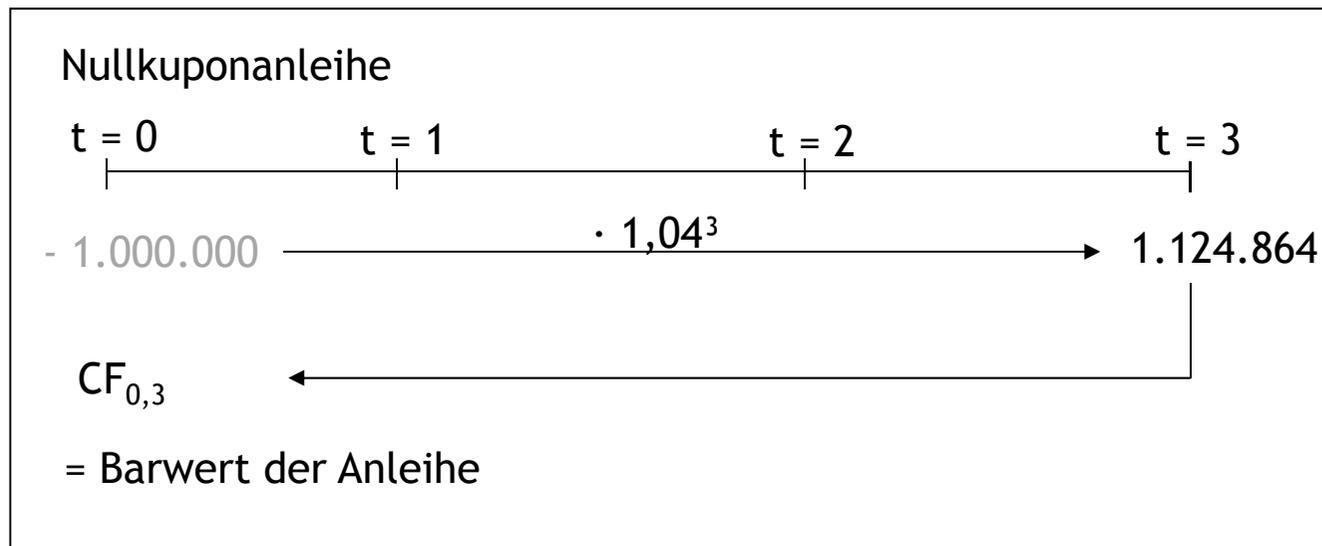
- ▶ Laufzeit der Anleihe: 3 Jahre, Nullkuponzinssatz: 4,00%, Tilgung: endfällig
Nominalvolumen: 1.000.000 EUR
- ▶ Das besondere an einem Nullkuponzinssatz ist, dass keine zwischenzeitlichen Zahlungen anfallen. Somit wird die gesamte Zinszahlung, zusammen mit dem Rückzahlungsbetrag, am Ende der Laufzeit beglichen. Die Höhe dieser Auszahlung beträgt

$$(1 + i)^{LZ} \cdot NV = 1,04^3 \cdot 1.000.000 = 1.124.864 \text{ EUR}$$

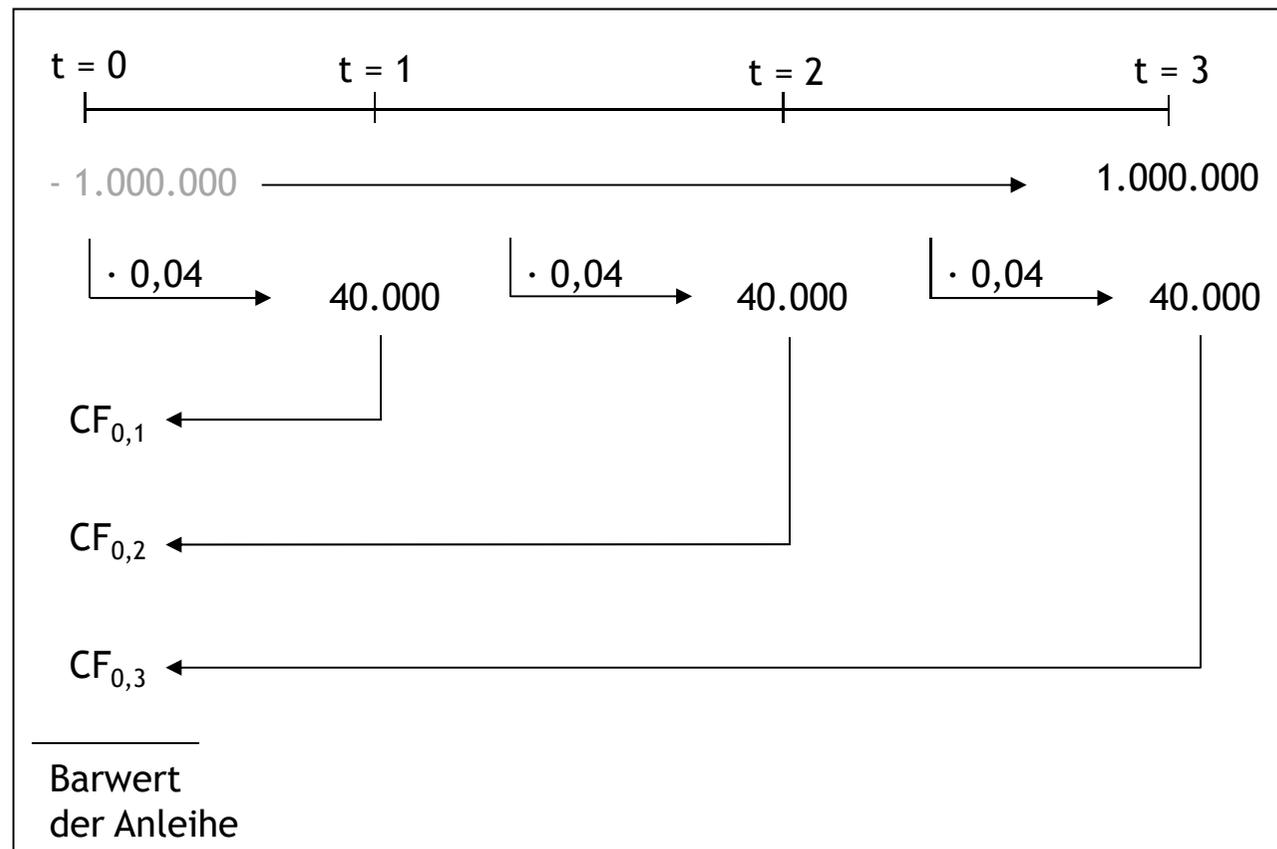


Der Preis einer Anleihe entspricht seinem Barwert

- Zur Bestimmung des aktuellen Werts (des Barwerts) müssen alle zukünftigen Zahlungen auf den heutigen Zeitpunkt transformiert werden:



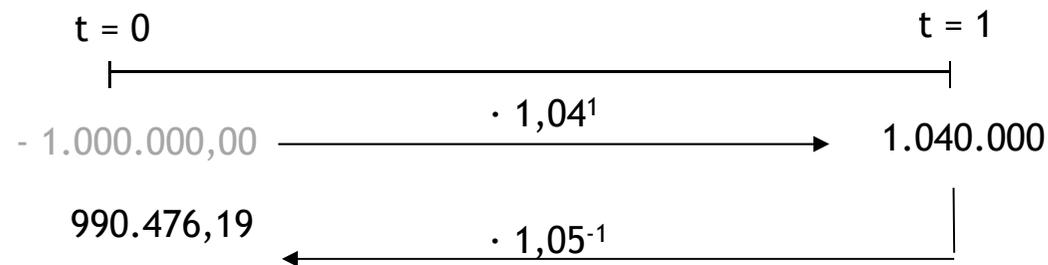
Bei der Kuponanleihe müssen alle Zahlungszeitpunkte einzeln betrachtet werden



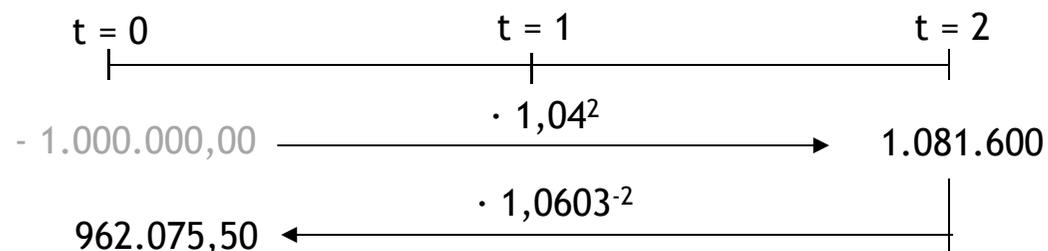
Transformation von zukünftigen Zahlungen auf den heutigen Zeitpunkt mit Nullkuponzinssätzen (I)

- Die aktuelle Zinsstrukturkurve (Nullkuponzinssätze) möge wie folgt lauten:
1-Jahreszinssatz $z(0,1)$: 5,00%, 2-Jahreszinssatz $z(0,2)$: 6,03%, 3-Jahreszinssatz $z(0,3)$: 7,10%

- Nullkuponanleihe, 1 Jahr Laufzeit, Nullkuponzinssatz 4,00%

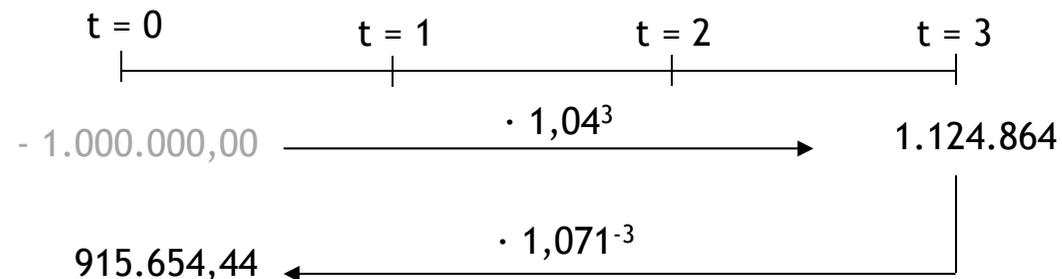


- Nullkuponanleihe, 2 Jahre Laufzeit, Nullkuponzinssatz 4,00%



Transformation von zukünftigen Zahlungen auf den heutigen Zeitpunkt mit Nullkuponzinssätzen (II)

- ▶ Nullkuponanleihe, 3 Jahre Laufzeit, Nullkuponzinssatz 4,00%

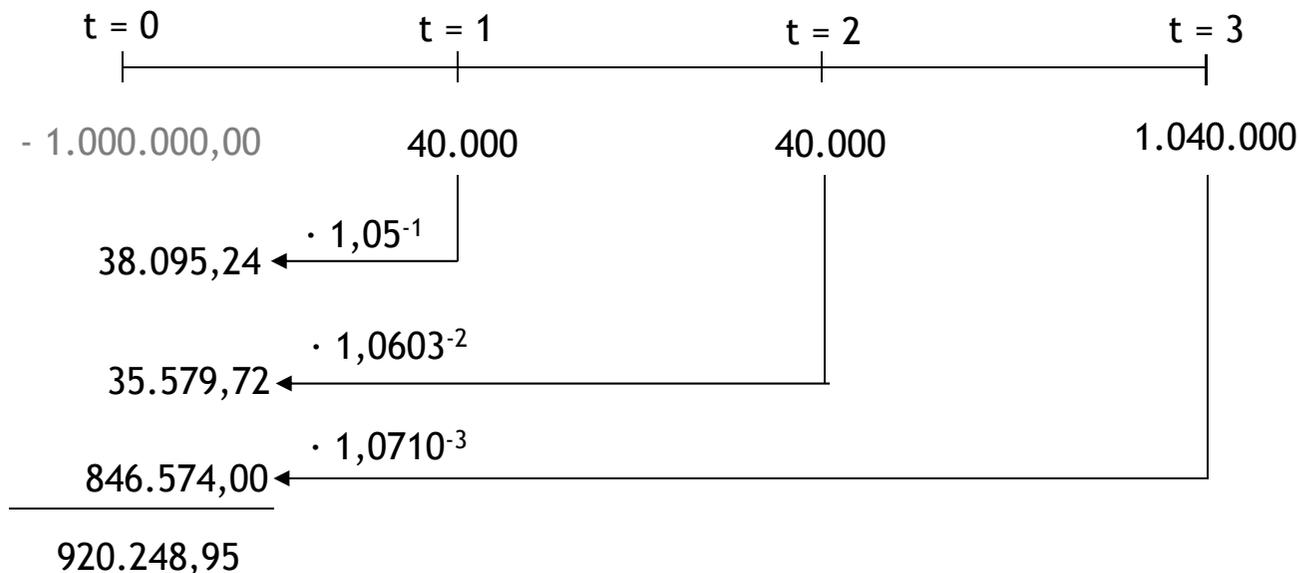


- ▶ Für die Abzinsung einer Zahlung zum Zeitpunkt LZ auf heute gilt folgende Formel:

$$CF_0 = \frac{CF_{LZ}}{(1 + z(0, LZ))^{LZ}}$$

Auch Kuponanleihen können mit Nullkuponzinssätzen abgezinst werden

- Unter der Annahme, dass Kuponanleihen synthetisch aus Nullkuponanleihen zusammengesetzt werden können, wird wie folgt abgezinst:

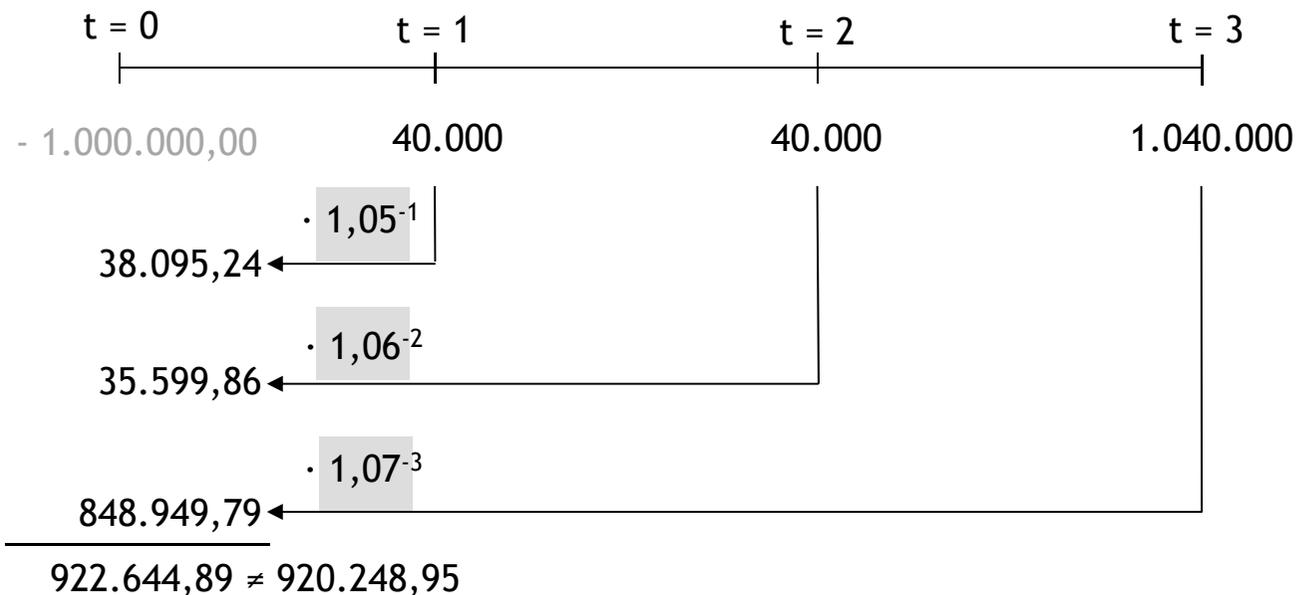


- Die Anleihe kann zum heutigen Zeitpunkt für 920.248 EUR erworben werden. Bei einem Nominalvolumen von 1 Mio. EUR entspricht das einem Kurs von $\frac{920.248,95}{1.000.000} = 92,02\%$.

Die Methodik kann jedoch nicht direkt auf Kuponzinssätze übertragen werden

➤ Zinsstrukturkurve Kuponzinssätze:

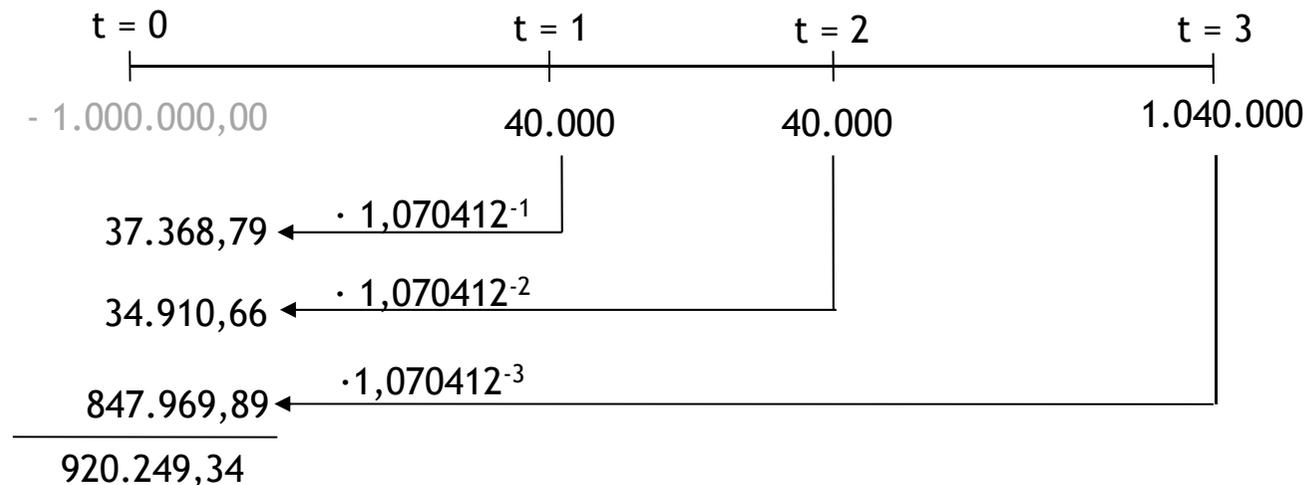
1-Jahreszinssatz $i(0,1)$: 5,00%, 2-Jahreszinssatz $i(0,2)$: 6,00%, 3-Jahreszinssatz $i(0,3)$: 7,00%



▶ falsche Barwertermittlung!

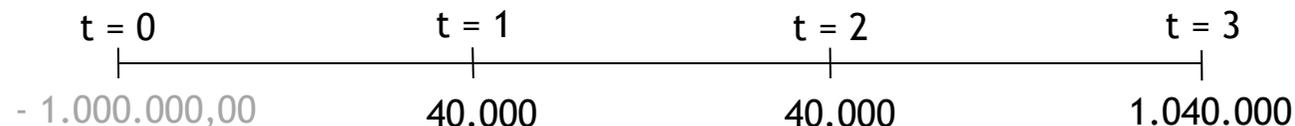
Die Ursache liegt in den zwischenzeitlichen Zahlungen

- Die Zahlung von 1.040.000 EUR wird im Fall der Nullkuponzinssätze mit einem Zinssatz von 7,10% abgezinst. Sämtliche zwischenzeitlichen Zahlungen werden zu diesem Zinssatz wieder angelegt, so dass es nur einen Zahlungszeitpunkt gibt.
- Der Kuponzinssatz von 7,00% geht hingegen von zwischenzeitlichen Zahlungen aus. Diese werden jedoch, abweichend zu oben, mit den laufzeitadäquaten Zinssätzen von 5,00% und 6,00% angelegt.
- Diese sogenannte Wiederanlageprämisse wird nur dann nicht verletzt, wenn der Spezialfall einer flachen Zinsstrukturkurve vorliegt:
 - ▶ Der aktuelle Kuponzinssatz möge, unabhängig von der Restlaufzeit, bei 7,0412% liegen



Eine korrekte Barwertermittlung mit Kuponzinssätzen gelingt nur bei konsequenter Duplizierung des Zahlungsstroms

➡ Das Ziel ist es, den folgende Zahlungsstrom durch Geschäfte am Geld- und Kapitalmarkt zu neutralisieren:



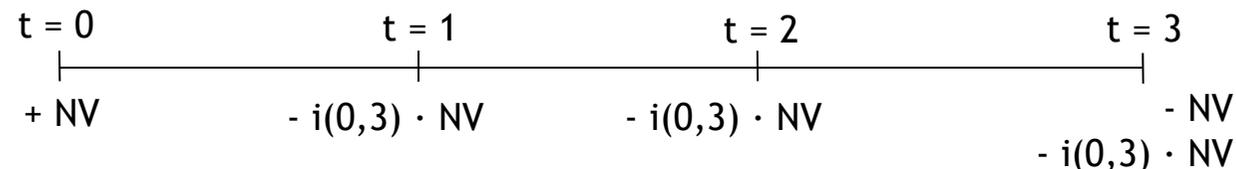
➡ Aktuelle Zinsstrukturkurve (Kuponzinssätze): $i(0,1) = 5,00\%$, $i(0,2) = 6,00\%$, $i(0,3) = 7,00\%$

➡ Die Duplizierung erfolgt nun rekursiv durch Geld- und Kapitalmarktgeschäfte:

1. Aufnahme eines Geld- und Kapitalmarktgeschäfts, das die Einzahlung in $t = 3$ neutralisiert
2. Berücksichtigung der dadurch entstandenen Zahlungen in $t = 1$ und $t = 2$
3. Neutralisierung der Zahlung in $t = 2$ durch Aufnahme eines GKM-Geschäfts
4. Berücksichtigung der dadurch entstandenen Zahlungen in $t = 1$
5. Neutralisierung der Zahlung in $t = 1$
6. Bestimmung des Barwerts durch Summierung der Zahlungen in $t = 0$

Die Einzahlung in $t = 3$ kann durch Aufnahme eines Kredits ausgeglichen werden

- Ein dreijähriger Kredit mit endfälliger Tilgung hat den folgenden Zahlungsstrom:

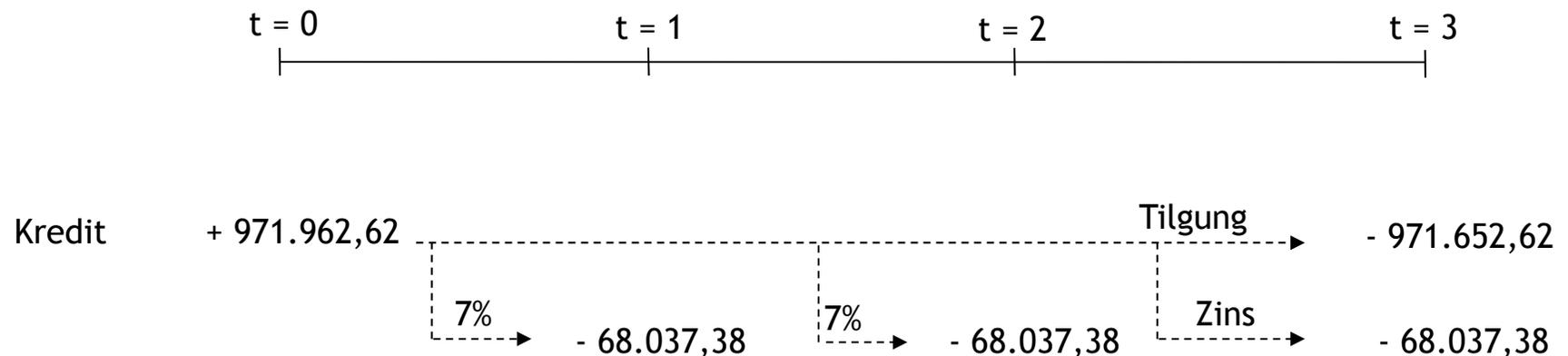


- Ausgeglichen werden soll die Zahlung in $t = 3$ in Höhe von 1.040.000 EUR. Dafür ist eine Auszahlung in gleicher Höhe nötig. Die Summe aus Tilgung ($-NV$) und Zins ($-i(0,LZ) \cdot NV$) des Kredits muss also genau -1.040.000 EUR ergeben. Das Nominalvolumen, bei dem dies zutrifft, kann bei einem Zins von 7% wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} -NV + (-0,07 \cdot NV) &= -1.040.000 \\ \Leftrightarrow -1,07 \cdot NV &= -1.040.000 \\ \Leftrightarrow NV &= 971.962,62 \end{aligned}$$

Die Zahlung in $t = 3$ ist nun neutralisiert, jedoch fallen zwischenzeitliche Zahlungen an

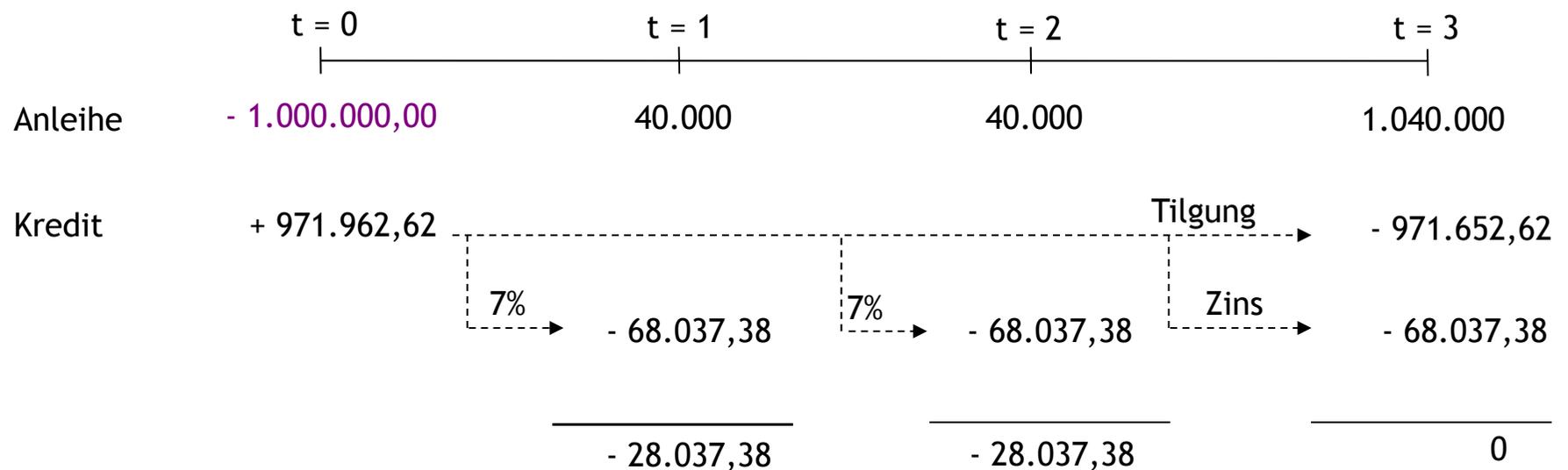
►► Für den gesamten Cash Flow folgt daraus:



►► Im nächsten Schritt wird $t = 2$ betrachtet

Die Zahlung in $t = 3$ ist nun neutralisiert, jedoch fallen zwischenzeitliche Zahlungen an

➔ Für den gesamten Cash Flow folgt daraus:



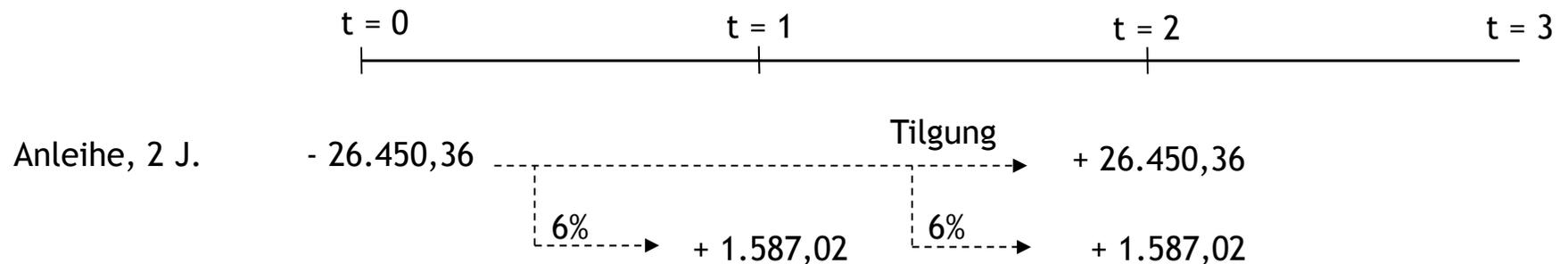
➔ Im nächsten Schritt wird $t = 2$ betrachtet

Zu neutralisieren ist die Zahlung in $t = 2$ in Höhe von -28.037,38 EUR

- ▶▶ Um diese Zinszahlung auszugleichen, muss eine Einzahlung in eben dieser Höhe erzeugt werden.
- ▶ benötigt wird eine zweijährige Anleihe, dessen Zins- und Tilgungszahlung im zweiten Jahr insgesamt +28.037,38 EUR betragen (2-Jahres-Kuponzinssatz: 6,00%)

$$\begin{aligned} NV + (0,06 \cdot NV) &= 28.037,38 \\ \Leftrightarrow 1,06 \cdot NV &= 28.037,38 \\ \Leftrightarrow NV &= 26.450,36 \end{aligned}$$

- ▶▶ Der gesamte Zahlungsstrom lautet:



Zu neutralisieren ist die Zahlung in $t = 2$ in Höhe von -28.037,38 EUR

- Um diese Zinszahlung auszugleichen, muss eine Einzahlung in eben dieser Höhe erzeugt werden.
- benötigt wird eine zweijährige Anleihe, dessen Zins- und Tilgungszahlung im zweiten Jahr insgesamt +28.037,38 EUR betragen (2-Jahres-Kuponzinssatz: 6,00%)

$$\begin{aligned} NV + (0,06 \cdot NV) &= 28.037,38 \\ \Leftrightarrow 1,06 \cdot NV &= 28.037,38 \\ \Leftrightarrow NV &= 26.450,36 \end{aligned}$$

- Der gesamte Zahlungsstrom lautet:

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Anleihe, 3 J.	- 1.000.000,00	40.000	40.000	1.040.000
Kredit, 3 J.	+ 971.962,62	- 68.037,38	- 68.037,38	- 1.040.000
				0
Anleihe, 2 J.	- 26.450,36		+ 26.450,36	
		+ 1.587,02	+ 1.587,02	
		- 26.450,36	0 (Rundungsdifferenz)	

Tilgung

6% → 6% →

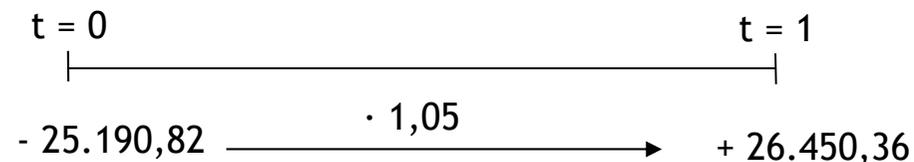
Die Zahlung in $t = 1$ wird zuletzt betrachtet

▶▶ Zahlungen in $t = 1$:	Zinsertrag Anleihe (3 J.)	40.000
	Zinsaufwand Kredit (3 J.)	- 68.037,38
	Zinsertrag Anleihe (2 J.)	+ 1.587,02
	Summe	- 26.450,36

- ▶▶ Auch diese Auszahlung kann durch eine Einzahlung neutralisiert werden, die aus einer Anleihe generiert wird. Der Kuponzinssatz für 1 Jahr beträgt 5%.

$$\begin{aligned} NV + 0,05 \cdot NV &= 26.450,36 \\ \Leftrightarrow 1,05 \cdot NV &= 26.450,36 \\ \Leftrightarrow NV &= 25.190,82 \end{aligned}$$

- ▶▶ Der Zahlungsstrom dieser Anleihe lautet:



Im Ergebnis sind alle Zahlungen neutralisiert worden und der Barwert kann abgelesen werden

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Anleihe, 3 J.	- 1.000.000,00	40.000	40.000	1.040.000
Kredit, 3 J.	+ 971.962,62	- 68.037,38	- 68.037,38	- 1.040.000
Anleihe, 2 J.	- 26.450,36	+ 1.587,02	+ 28.037,36	0
Anleihe, 1 J.	- 25.190,82	+ 26.450,36	0 (Rundungsdifferenz)	
	920.321,44	0		

- ➡ Die Differenz zur Berechnung über Nullkuponzinssätzen (72,49 EUR) ist auf Rundungsdifferenzen zurück zu führen.
- ➡ Nur mittels einer solchen Berechnung kann der Barwert korrekt aus Kuponzinssätzen bestimmt werden!

Eine weitere Möglichkeit zur Abzinsung bieten die Zerobond-Abzinsfaktoren

► Beantworten die Fragen:

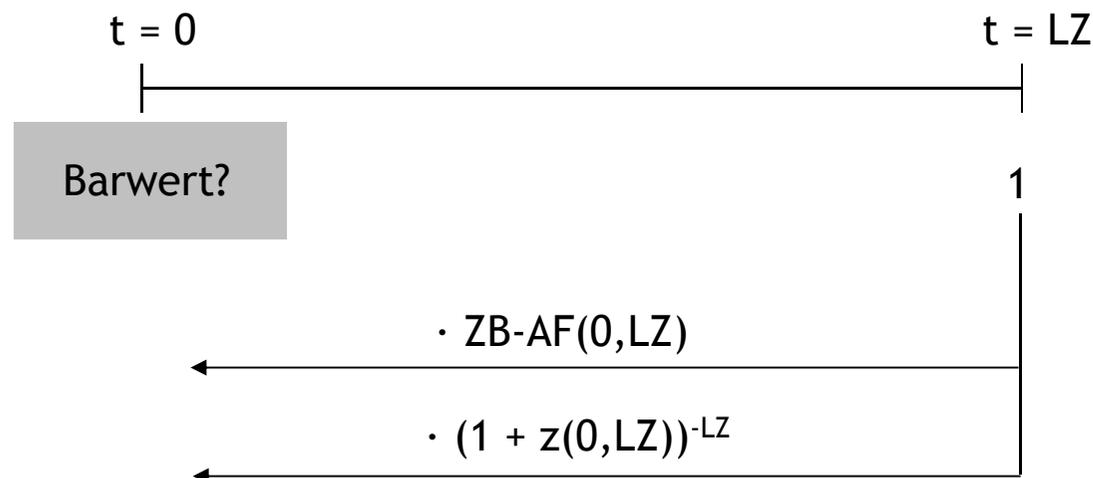
1. Wieviel ist 1 EUR, der in LZ Jahren gezahlt wird, heute wert?
2. Welchen Betrag muss ich heute anlegen, um in LZ Jahren eine Zahlung von 1 EUR zu erhalten?



Eine weitere Möglichkeit zur Abzinsung bieten die Zerobond-Abzinsfaktoren

► Beantworten die Fragen:

1. Wieviel ist 1 EUR, der in LZ Jahren gezahlt wird, heute wert?
2. Welchen Betrag muss ich heute anlegen, um in LZ Jahren eine Zahlung von 1 EUR zu erhalten?



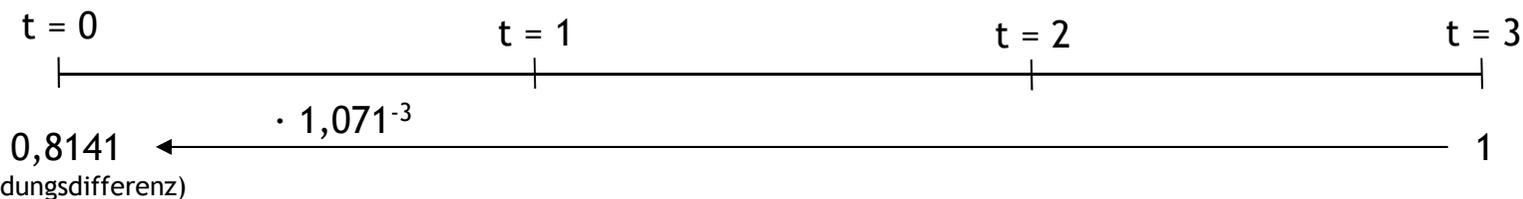
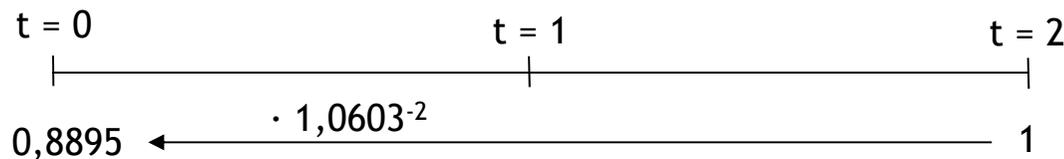
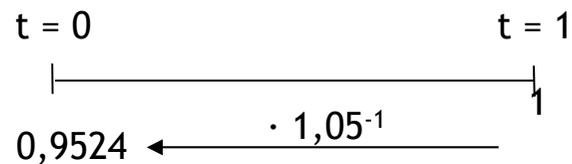
Zerobond-Abzinsfaktoren und Nullkuponzinssätze stehen in einem direkten Zusammenhang

- ➔ In beiden Fällen werden keine zwischenzeitlichen Zahlungen vorgenommen, sämtliche Zinseszinsseffekte sind integriert
- ➔ Können unmittelbar umgerechnet werden:

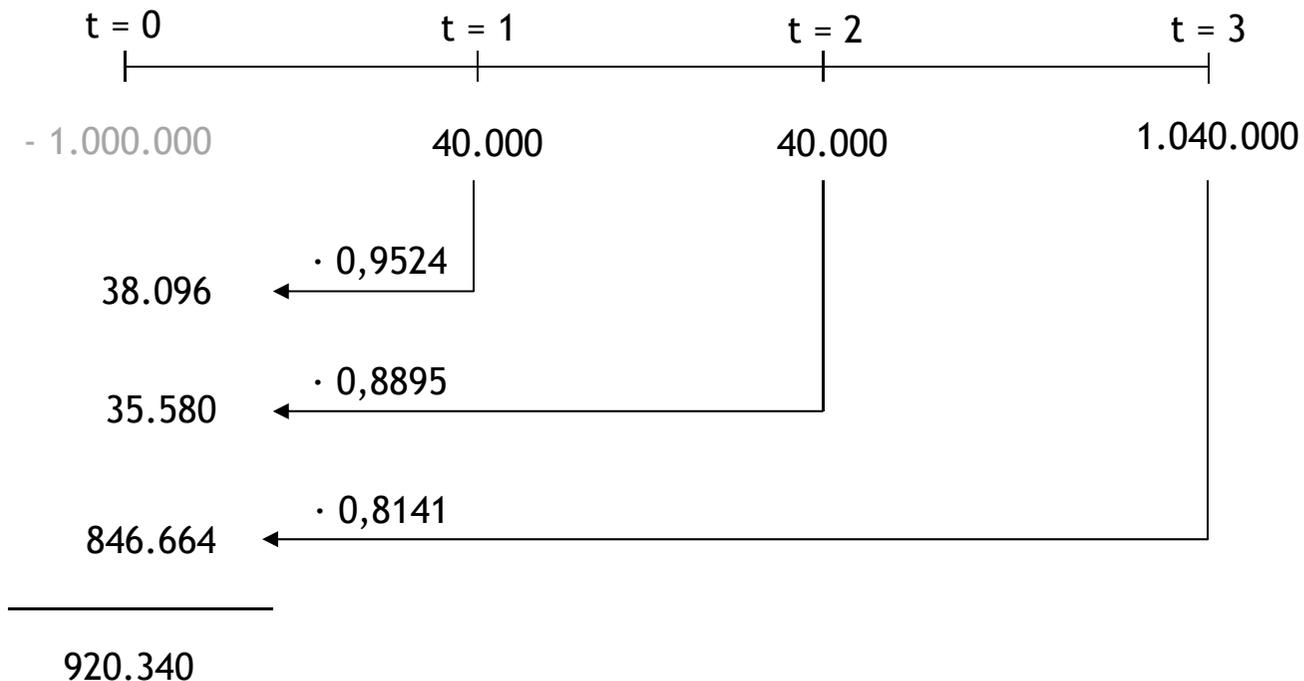
$$z(t, LZ) = \text{ZB-AF}(t, LZ)^{\frac{1}{LZ}} - 1$$

$$\text{ZB-AF}(t, LZ) = (1 + z(t, LZ))^{-LZ}$$

- ➔ Entsprechend gilt:



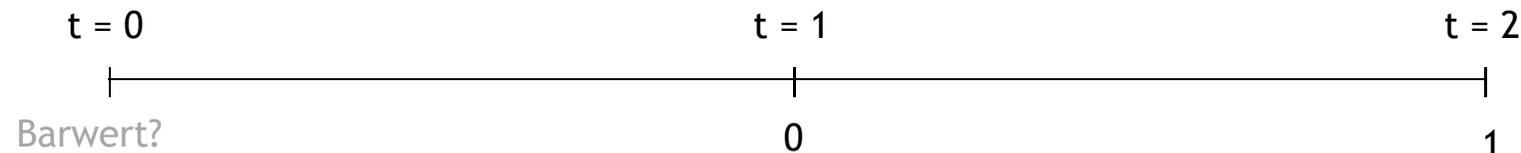
Der Barwert kann unmittelbar berechnet werden



- Zerobond-Abzinsfaktoren sind normiert auf eine Auszahlung von 1 EUR nach LZ Jahren. Durch Duplizierung des Zahlungsstrom können ZB-AFs aus Kuponzinssätzen bestimmt werden.

Bestimmung des zweijährigen Zerobond-Abzinsfaktors aus Kuponzinssätzen

- Der Zahlungsstrom, der durch die Duplizierung neutralisiert werden soll, sieht wie folgt aus:

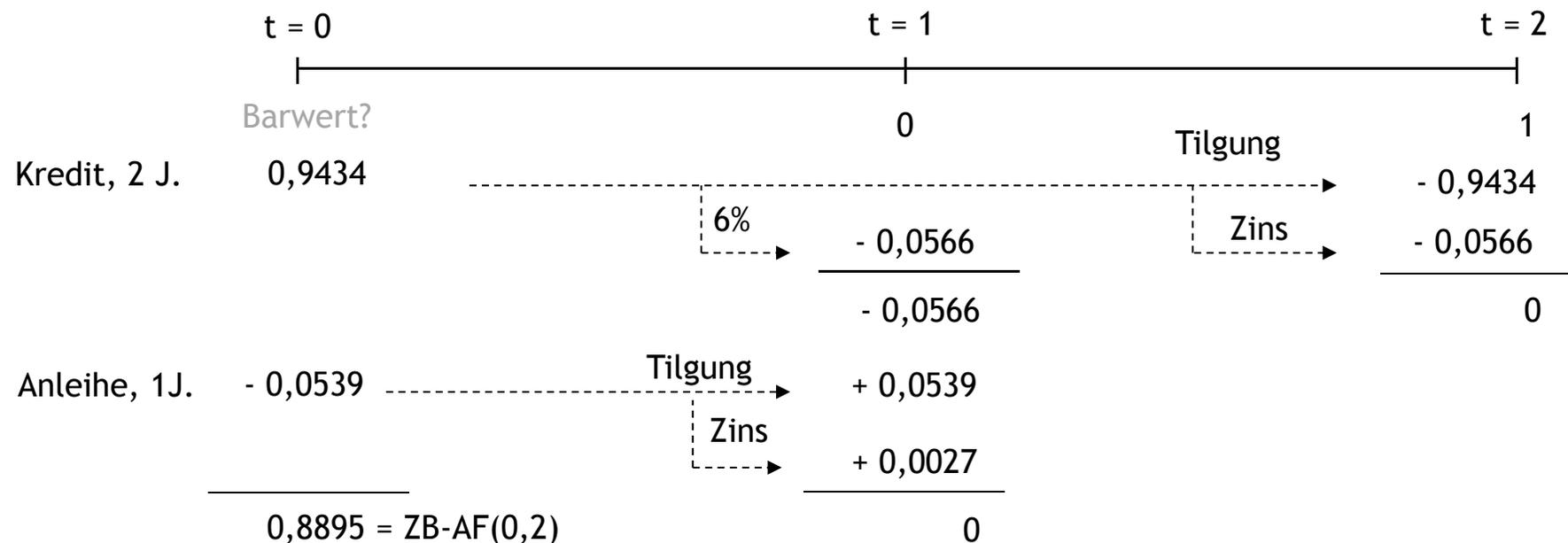


- Auch hier wird rekursiv vorgegangen, d.h. im ersten Schritt wird lediglich $t = 2$ betrachtet
- Gesucht ist ein Geschäft am GKM, das eine Auszahlung von 1 EUR erzeugt, d.h. es wird ein Kredit benötigt, dessen Summe aus Zins und Tilgung genau 1 EUR beträgt
 - Das Nominalvolumen des Kredits kann wie gewohnt bestimmt werden. Der Kuponzinssatz für 2 Jahre beträgt 6,00%.

$$\begin{aligned} -NV + (-0,06 \cdot NV) &= -1 \\ \Leftrightarrow -1,06 \cdot NV &= -1 \\ \Leftrightarrow NV &= 0,9434 \end{aligned}$$

- Da es sich um einen Kuponzins handelt, fällt nun aber in $t = 1$ eine Zinszahlung an in Höhe von:
 $0,9434 \cdot 0,06 = 0,0566$ EUR

Die zu leistende Zinszahlung in $t = 1$ kann durch eine Anleihe refinanziert werden



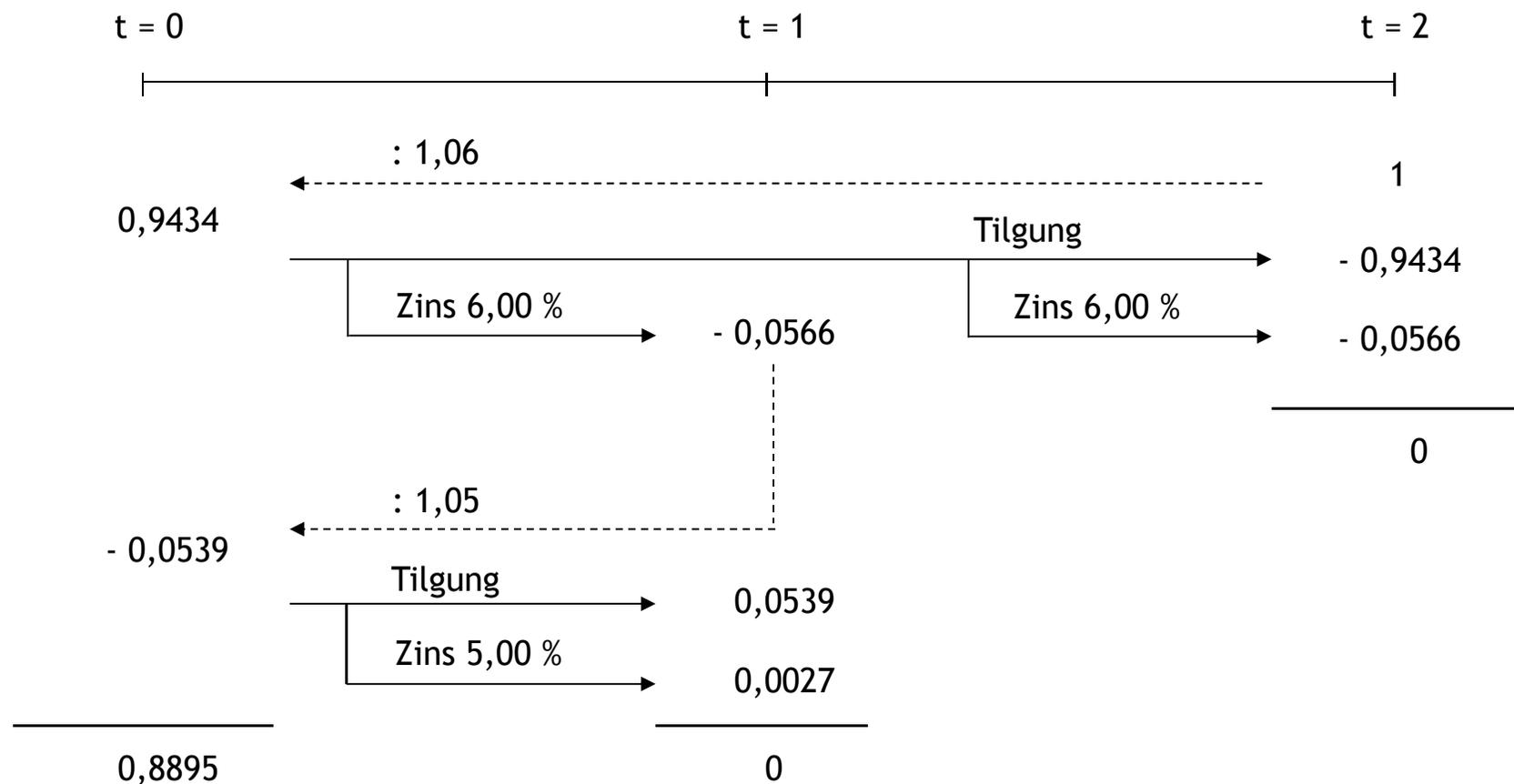
► Berechnung des benötigten Nominalvolumens der Anleihe:

$$NV + (0,05 \cdot NV) = 0,0566$$

$$\Leftrightarrow 1,05 \cdot NV = 0,0566$$

$$\Leftrightarrow NV = 0,0539$$

Zusammenfassung: Bestimmung des ZB-AF (0,2) mit Kuponzinssätzen

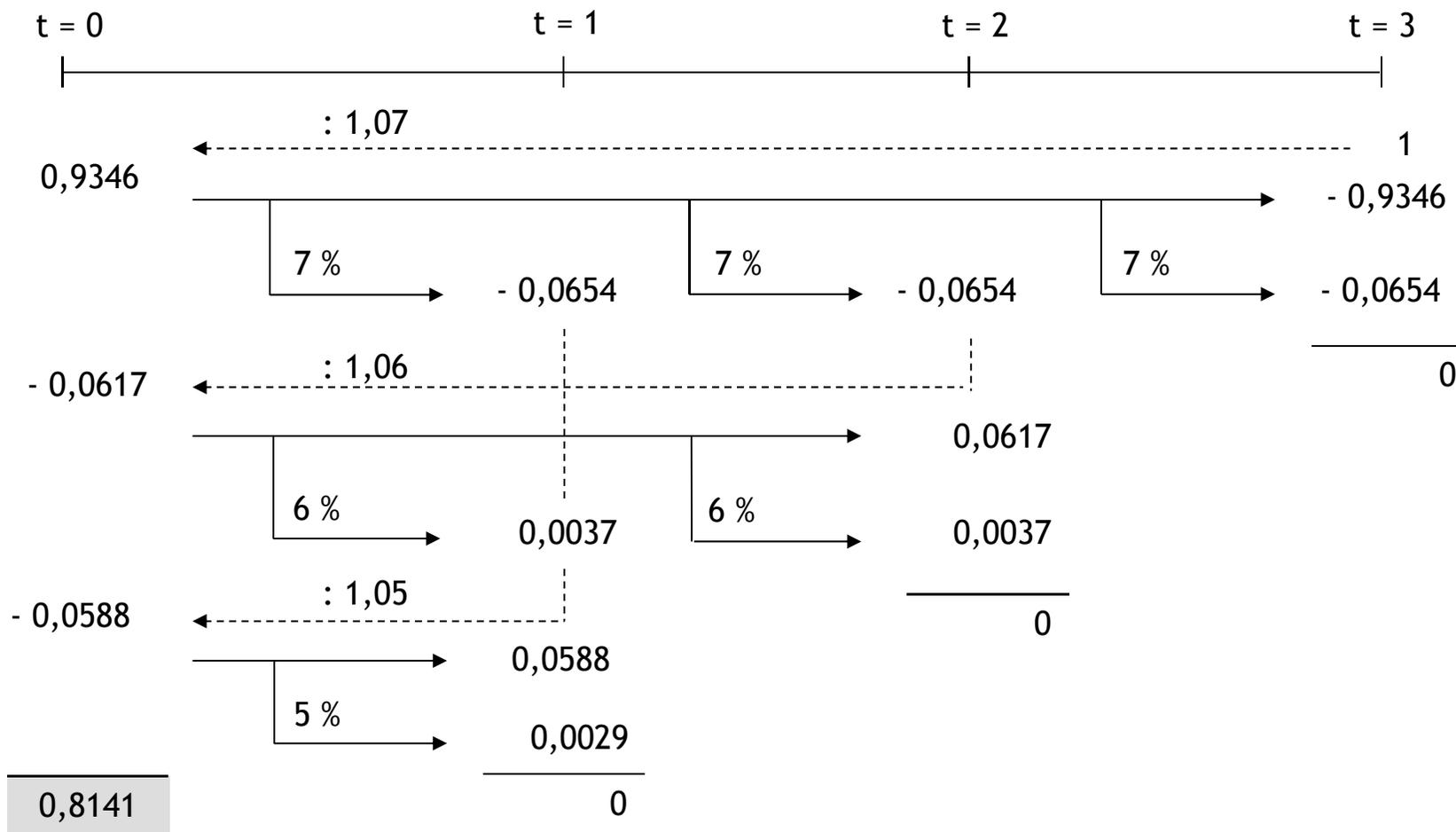


Aufgabe: Zerobond-Abzinsfaktoren

- ▶▶ 1. Berechnen Sie den ZB-AF(0,3) unter Verwendung der $i(0,1) = 5,00\%$, $i(0,2) = 6,00\%$ und $i(0,3) = 7,00\%$

- ▶▶ 2. Warum wird im ersten Schritt lediglich durch $(1+i(0,LZ))$ geteilt, und nicht durch $(1+i(0,LZ))^{LZ}$?

Lösung Frage 1: Berechnung ZB-AF(0,3) aus Kuponzinssätzen



Lösung Frage 2

- ▶▶ 2. Warum wird im ersten Schritt lediglich durch $(1+i(0,LZ))$ geteilt, und nicht durch $(1+i(0,LZ))^{LZ}$?
- ▶ Gesucht ist das Nominalvolumen, dessen Summe aus Zins und Tilgung genau 1 ergibt. Da es sich um einen jährlich gezahlten Kuponzins handelt, beträgt die Zinszahlung immer, unabhängig von der Laufzeit, $i(0,LZ)*NV$. Zuzüglich der Tilgung ergibt sich der Term

$$(1+i(0,LZ)) \cdot NV = 1$$

$$NV = \frac{1}{1+i(0,LZ)}$$

$$NV = (1+i(0,LZ))^{-1}$$

Ergebnis Teil I

- ▶▶ Wir sind nun in der Lage, Barwerte auf drei verschiedene Arten zu bestimmen:
 - ▶ mit Nullkuponzinssätzen
 - ▶ mit Kuponzinssätzen
 - ▶ mit Zerobond-Abzinsfaktoren

- ▶▶ Außerdem ist es uns möglich, aus Kuponzinssätzen die entsprechenden
 - ▶ Zerobond-Abzinsfaktoren und daraus wiederum
 - ▶ Nullkuponzinssätze zu bestimmen

Übung Teil I

▶▶ Es gelte die folgende Kuponzinsstrukturkurve:

1 Jahr: 3,00%

2 Jahre: 4,00%

3 Jahre: 5,00%

4 Jahre: 6,00%

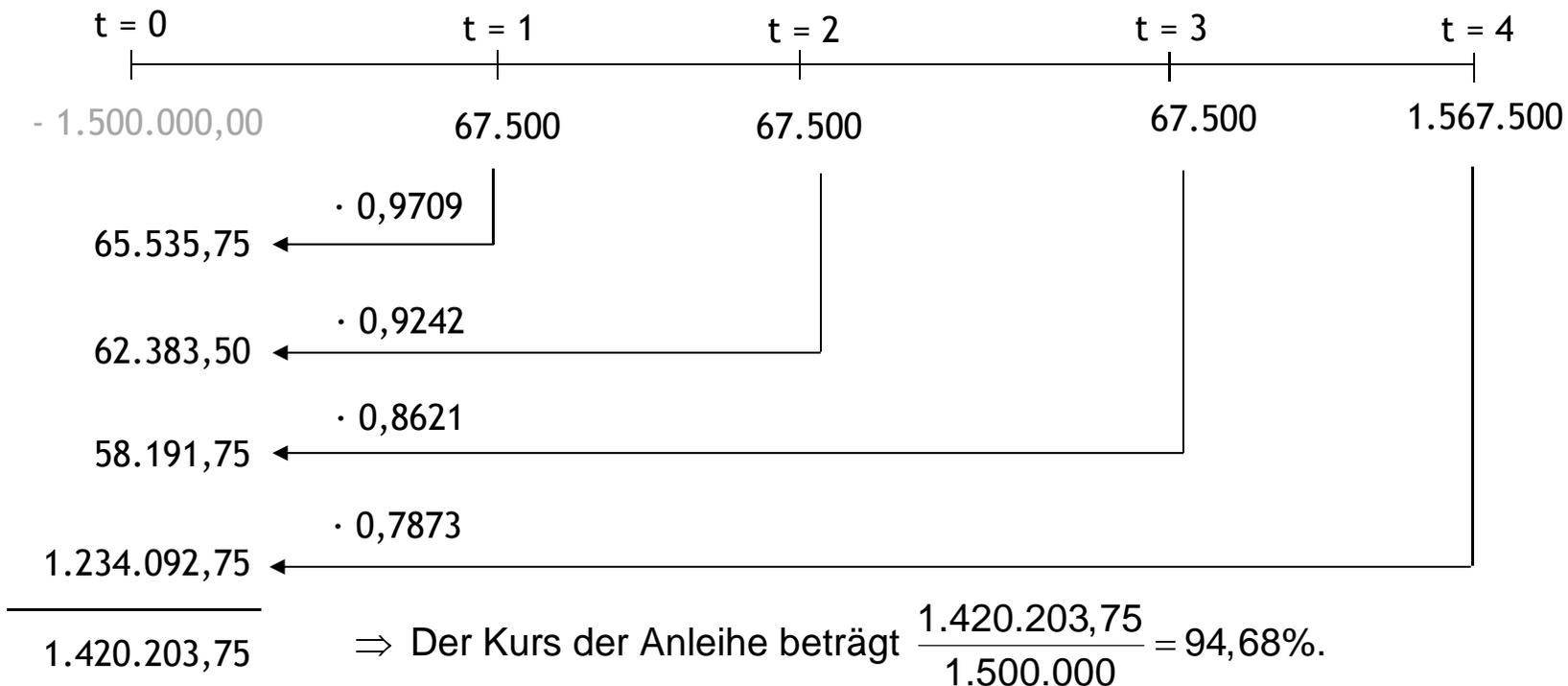
- Berechnen Sie die entsprechenden Zerobond-Abzinsfaktoren und Nullkuponzinssätze.
- Bestimmen Sie den Barwert der folgenden Anleihe:

Laufzeit	4 Jahre
Kuponzinssatz	4,50%
Nominalvolumen	1.500.000
Tilgung	endfällig

- Wie hoch ist der Kurs der Anleihe?

Lösung Übung Teil I

Jahr t	1	2	3	4
Kupon $i(0,t)$	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%
ZB-AF $(0,t)$	0,9709	0,9242	0,8621	0,7873
Nullkupon $z(0,t)$	3,00%	4,02%	5,07%	6,16%



Agenda

- Finanzmathematische Grundbegriffe
- Varianten der Barwertbestimmung
- Berechnung von Zinssätzen bei beliebigen Startzeitpunkten und Laufzeiten
- Statistische Grundlagen

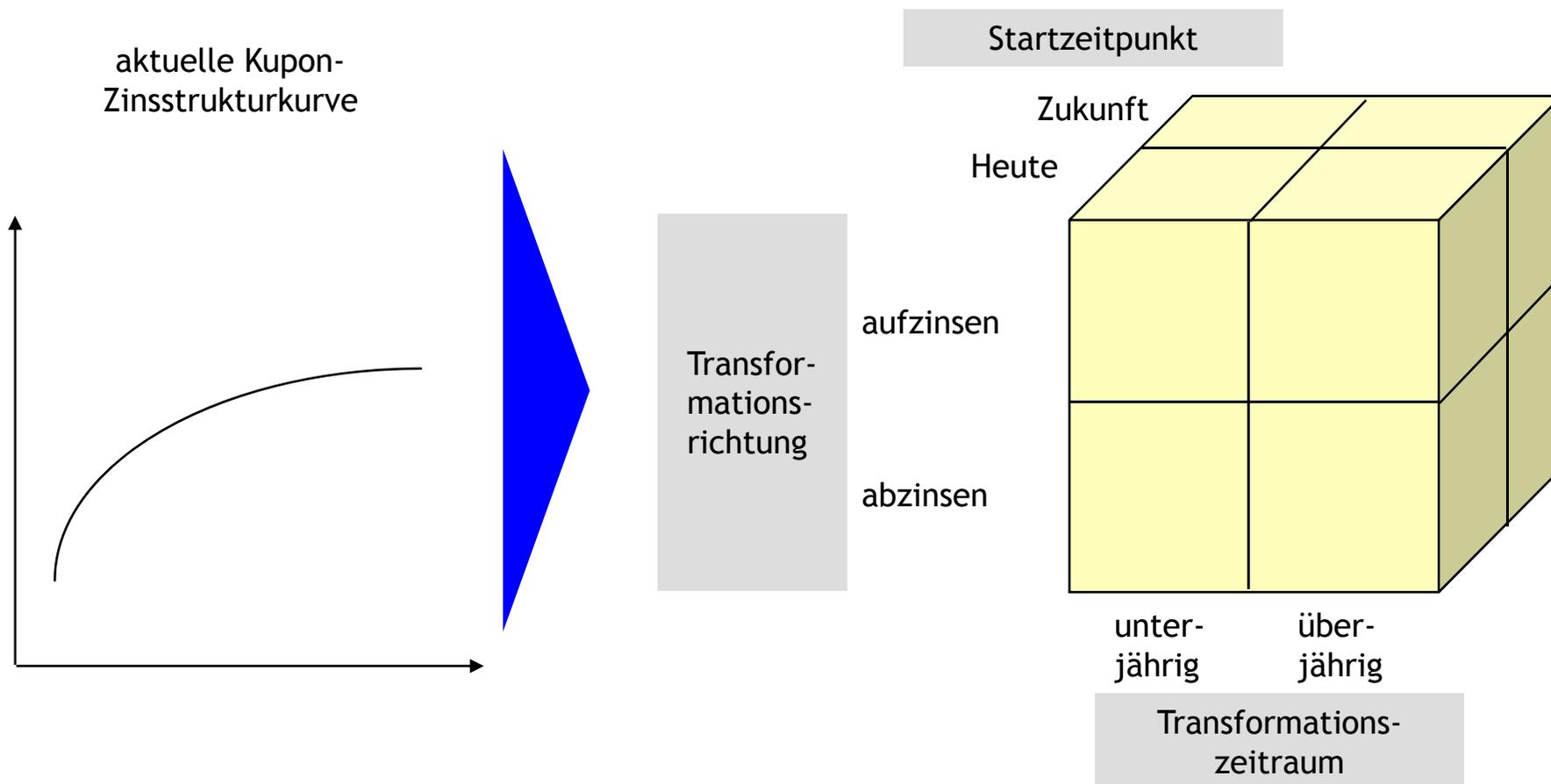
Überblick Teil II

- ▶▶ Berechnung von Zinssätzen, die
 - ▶ keine ganzzahligen Laufzeiten haben
 - ▶ nicht im heutigen Zeitpunkt beginnen

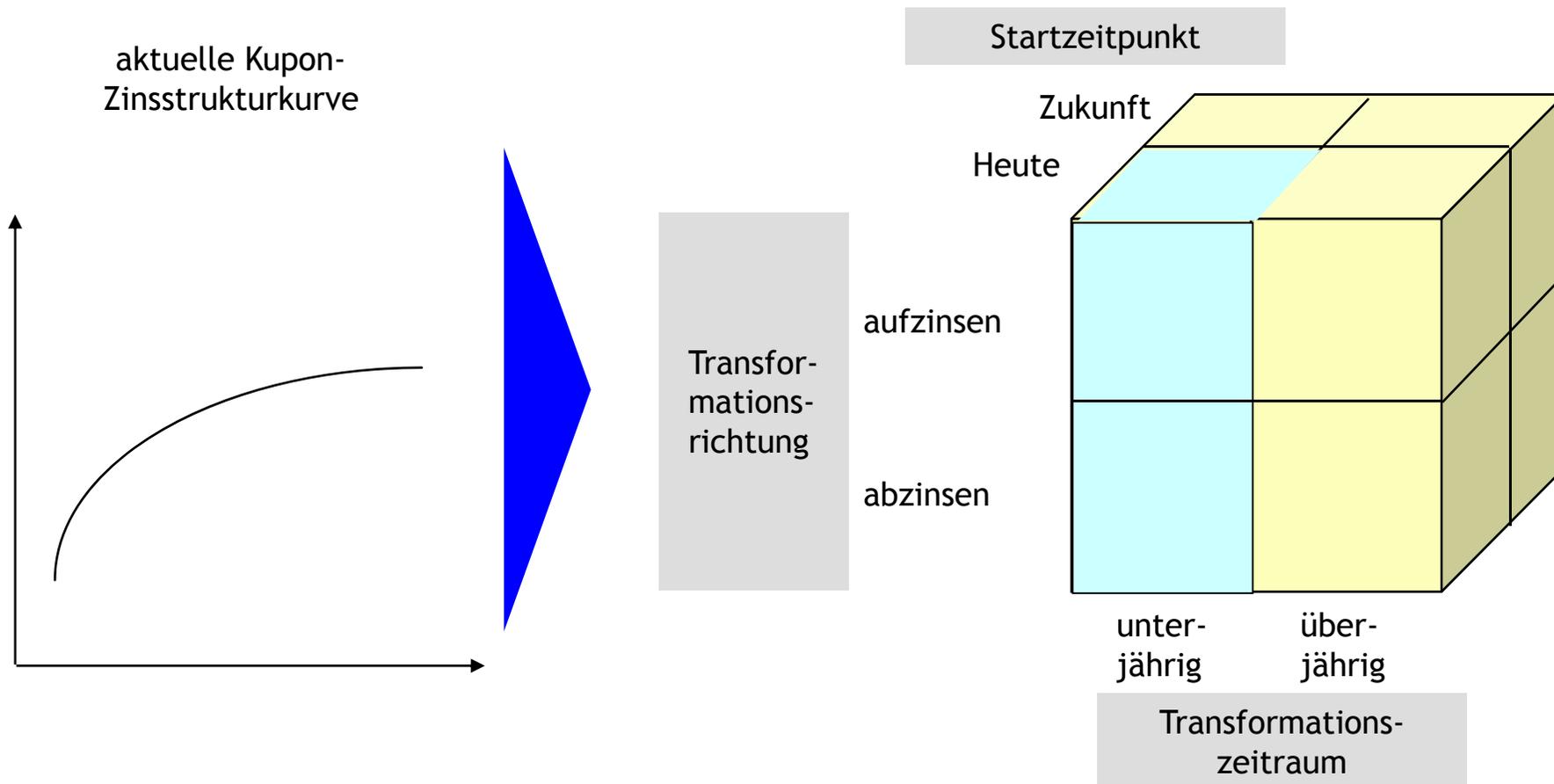
- ▶▶ Jeweils für
 - ▶ Kuponzinssätze
 - ▶ Nullkuponzinssätze
 - ▶ Zerobond-Abzinsfaktoren

- ▶▶ Übergang zu stetigen Zinssätzen

Möglichkeiten der Zahlungsstromtransformation: Der Kalkulationszinswürfel



Möglichkeiten der Zahlungsstromtransformation: Der Kalkulationszinswürfel



Unterjährige Laufzeiten

▶▶ Geläufige Referenzzinssätze für unterjährige Laufzeiten:

	Laufzeiten
▶ EURIBOR: Euro Interbank Offered Rate	1 - 3 Wochen, 1 - 12 Monate
▶ LIBOR: London Interbank Offered Rate	1 - 3 Wochen, 1 - 12 Monate
▶ EONIA: European Overnight Index Average	1 Tag

▶▶ sämtliche Zinssätze werden pro Jahr (p.a., per annum) angegeben und müssen auf die entsprechende Laufzeit umgerechnet werden!

Problem: Wie lange sind z.B. 3 Monate?

- ▶ alle Tage zählen
- ▶ nur Werkstage zählen
- ▶ Monat pauschal 30 Tage
- ▶ etc.

Tageszählweisen (Day-Count Conventions)

- ▶ grundsätzlich gilt:
- $$i_{LZ} = i_{p.a.} \cdot \frac{\text{Anzahl der Tage im Betrachtungszeitraum (LZ)}}{\text{Anzahl der Tage im Gesamtzeitraum (Basis)}}$$
- ▶ $\frac{30}{360}$: Jeder Monat hat 30 Tage, das Jahr entsprechend 360 Tage
- ▶ $\frac{30}{365}$: Jeder Monat hat 30 Tage, das Jahr jedoch 365 Tage.
- ▶ $\frac{act}{360}$: Die Tage werden exakt gezählt, das Jahr wird auf 360 Tage fixiert
- ▶ $\frac{act}{365}$: Die Tage werden exakt gezählt, das Jahr hat immer 365 Tage
- ▶ $\frac{act}{act}$: Sowohl Tage als auch das Jahr wird taggenau gezählt.
- ▶ Die absolute Höhe der Verzinsung wird durch die Tageszählweise erheblich beeinflusst und muss daher bei zinstragenden Produkten immer mit angegeben werden.

Umrechnung von Tageszählweisen

- ▶▶ Jede Zählweise kann in eine beliebige andere Tageszählweise umgeformt werden
- ▶▶ Beantwortet die Frage: Welcher Zinssatz $i_{(2)}$ führt bei einer Zählweise (2) zur gleichen Auszahlung wie Zinssatz $i_{(1)}$ bei Zählweise (1)?
 - ▶ Der Zinssatz von 5% wird mit der Zählweise act/360 gezahlt. Dieser Zinssatz soll nun an die Zählweise act/365 angepasst werden.

$$\begin{aligned}i_{(1)} \cdot \frac{\text{act}}{360} &= i_{(2)} \cdot \frac{\text{act}}{365} \\ \Leftrightarrow 0,05 \cdot \frac{59}{360} &= i_{(2)} \cdot \frac{59}{365} \\ \Leftrightarrow i_{(2)} &= 0,05 \cdot \frac{59}{360} \cdot \frac{365}{59} \\ \Leftrightarrow i_{(2)} &= 0,0507\end{aligned}$$

- ▶▶ Der höhere Zinssatz von 5,07% gleicht die 5 Tage aus, die bei der Konvention act/360 im Nenner weniger gezahlt werden, so dass pro Tag der gleiche Zins gezahlt wird:

$$i_{(1)} \cdot \frac{\text{act}}{360} = 5,00 \cdot \frac{59}{360} = 0,819\text{EUR} \qquad i_{(2)} \cdot \frac{\text{act}}{365} = 5,07 \cdot \frac{59}{365} = 0,819\text{EUR}$$

Anpassung an unterschiedliche Zinsverrechnungstermine

- ▶ Zinssätze, die unterschiedlich oft im Jahr ausgezahlt werden, können nicht direkt verglichen werden, sondern müssen erst umgeformt werden.
- ▶ Beispiel: Der Zinssatz $i_{(2)}$ wird an m Zinsverrechnungstermine pro Jahr ausgezahlt, während der Zinssatz $i_{(1)}$ nur einmal jährlich gezahlt wird. Die Day-Count Convention sei in beiden Fällen 30/360.

- ▶ Fall 1: Umrechnung von ganzjährig auf unterjährig
 $i_{(1)} = 5\%$ (jährliche Auszahlung) soll in $i_{(2)}$ umgerechnet werden, der halbjährlich gezahlt wird

$$i_{(2)} = \left[(1 + i_{(1)})^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \cdot m$$

$$i_{(2)} = \left[(1 + 0,05)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \cdot 2 = i_{(2)} = 4,94\%$$

- ▶ Fall 2: Umrechnung von unterjährig auf ganzjährig
 $i_{(2)} = 5,50\%$ wird vierteljährlich gezahlt; wie groß ist der äquivalente jährliche Zins?

$$i_{(1)} = \left[1 + \frac{i_{(2)}}{m} \right]^m - 1$$

$$i_{(1)} = \left[1 + \frac{0,055}{4} \right]^4 - 1 = 5,61\%$$

Aufgabe: Tageszählweisen

- ▶▶ Eine Zahlung in Höhe von 100 EUR wird im Zeitraum 01.02.2009 bis 31.03.2009 zu einem Zinssatz von 5,00% p.a. angelegt. Bestimmen Sie die Höhe der Zinszahlung in Abhängigkeit der unterschiedlichen Tageszählweisen!

- ▶▶ Berechnen Sie den Zinssatz, der bei der Zählweise 30/360 zur gleichen Zinszahlung führt wie bei Anwendung der Zählweise act/act.

- ▶▶ Warum ist der so berechnete Zinssatz niedriger als der bisherige?

Aufgabe: Tageszählweisen

- Eine Zahlung in Höhe von 100 EUR wird im Zeitraum 01.02.2009 bis 31.03.2009 zu einem Zinssatz von 5,00% p.a. angelegt. Bestimmen Sie die Höhe der Zinszahlung in Abhängigkeit der unterschiedlichen Tageszählweisen!

$$\frac{30}{360} : \quad 0,05 \cdot \frac{60}{360} \cdot 100\text{EUR} = 0,833\text{EUR}$$

$$\frac{30}{365} : \quad 0,05 \cdot \frac{60}{365} \cdot 100\text{EUR} = 0,822\text{EUR}$$

$$\frac{\text{act}}{360} : \quad 0,05 \cdot \frac{59}{360} \cdot 100\text{EUR} = 0,819\text{EUR}$$

$$\frac{\text{act}}{365} : \quad 0,05 \cdot \frac{59}{365} \cdot 100\text{EUR} = 0,808\text{EUR}$$

$$\frac{\text{act}}{\text{act}} : \quad 0,05 \cdot \frac{59}{365} \cdot 100\text{EUR} = 0,808\text{EUR}$$

Aufgabe: Tageszählweisen

- ▶ Eine Zahlung in Höhe von 100 EUR wird im Zeitraum 01.02.2009 bis 31.03.2009 zu einem Zinssatz von 5,00% p.a. angelegt. Bestimmen Sie die Höhe der Zinszahlung in Abhängigkeit der unterschiedlichen Tageszählweisen!
- ▶ Berechnen Sie den Zinssatz, der bei der Zählweise 30/360 zur gleichen Zinszahlung führt wie bei Anwendung der Zählweise act/act.

$$i_{(1)} \cdot \frac{30}{360} = i_{(2)} \cdot \frac{\text{act}}{\text{act}}$$

$$\Leftrightarrow i_{(1)} \cdot \frac{60}{360} = 0,05 \cdot \frac{59}{365}$$

$$\Leftrightarrow i_{(1)} = 0,05 \cdot \frac{59}{365} \cdot \frac{360}{60}$$

$$\Leftrightarrow i_{(2)} = 4,85\%$$

Zinszahlung act/act: $0,05 \cdot \frac{59}{365} \cdot 100\text{EUR} = 0,808\text{EUR}$

Zinszahlung 30/360: $0,0485 \cdot \frac{60}{360} \cdot 100\text{EUR} = 0,808\text{EUR}$

Aufgabe: Tageszählweisen

- ▶▶ Eine Zahlung in Höhe von 100 EUR wird im Zeitraum 01.02.2009 bis 31.03.2009 zu einem Zinssatz von 5,00% p.a. angelegt. Bestimmen Sie die Höhe der Zinszahlung in Abhängigkeit der unterschiedlichen Tageszählweisen!
- ▶▶ Berechnen Sie den Zinssatz, der bei der Zählweise 30/360 zur gleichen Zinszahlung führt wie bei Anwendung der Zählweise act/act.
- ▶▶ Warum ist der so berechnete Zinssatz niedriger?
 - ▶ Bei der Zählweise 30/360 ist die Laufzeit einen Tag länger als bei Verwendung der Zählweise act/act, somit steigt der Bruch als Ganzes an. Zusätzlich ist die Basis (der Nenner) kleiner, was den Effekt noch verstärkt. Diesen Anstieg in der Tageszahl muss durch ein entsprechendes Absinken im Zins aufgefangen werden, damit die Höhe der Zinszahlung gleich ist.

$$\text{Zinszahlung act/act:} \quad 0,05 \cdot \frac{59}{365} \cdot 100\text{EUR} = 0,808\text{EUR}$$

$$\text{Zinszahlung 30/360:} \quad 0,0485 \cdot \frac{60}{360} \cdot 100\text{EUR} = 0,808\text{EUR}$$

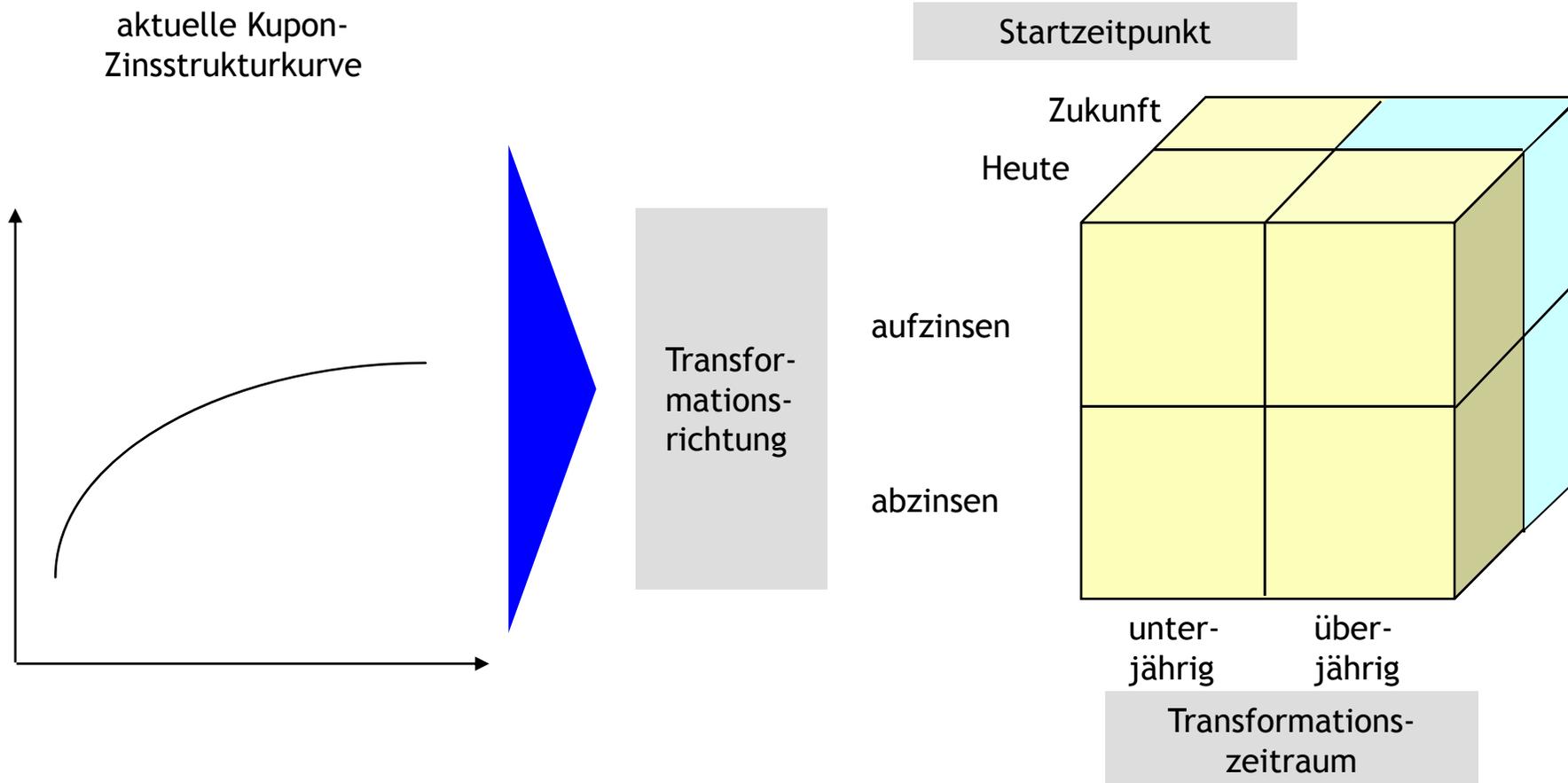
Berechnung von unterjährigen Zerobond-Abzinsfaktoren mit heutigem Startzeitpunkt

$$\text{ZB-AF}(0, \text{LZ}) = \frac{1}{1 + i \cdot \frac{\text{LZ}}{\text{Basis}}}$$

► z.B. $\text{ZB-AF}(0, 3\text{M})$ bei einem Kuponzins für 3 Monaten über 3,00% p.a.:

$$\text{ZB-AF}(0, 3\text{M}) = \frac{1}{1 + 0,03 \cdot \frac{3}{12}} = 0,9926$$

Möglichkeiten der Zahlungsstromtransformation: Der Kalkulationszinswürfel

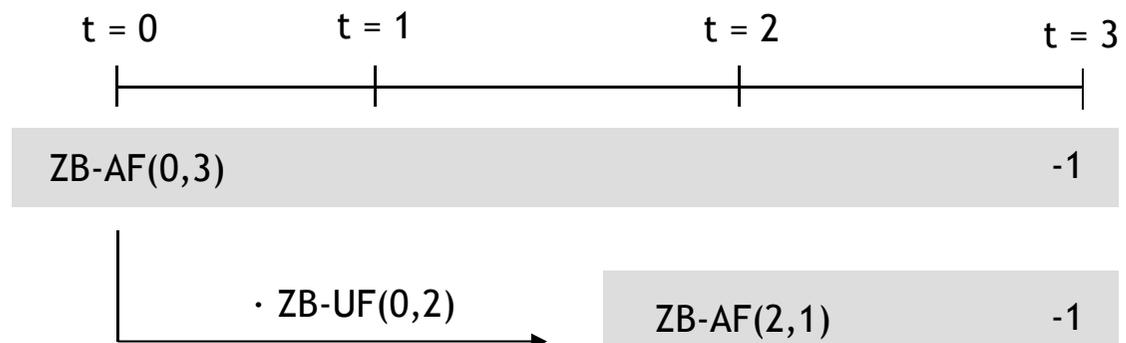


Zur Bestimmung des überjährigen ZB-AFs werden die ZB-AFs mit Startzeitpunkt $t = 0$ benötigt

- ▶▶ Notation: ZB-AF(t, LZ)
 - ▶ Startzeitpunkt: t
 - ▶ Laufzeit: LZ
- } Zahlung erfolgt in $t+LZ$ Jahren und wird auf den Zeitpunkt t abgezinst

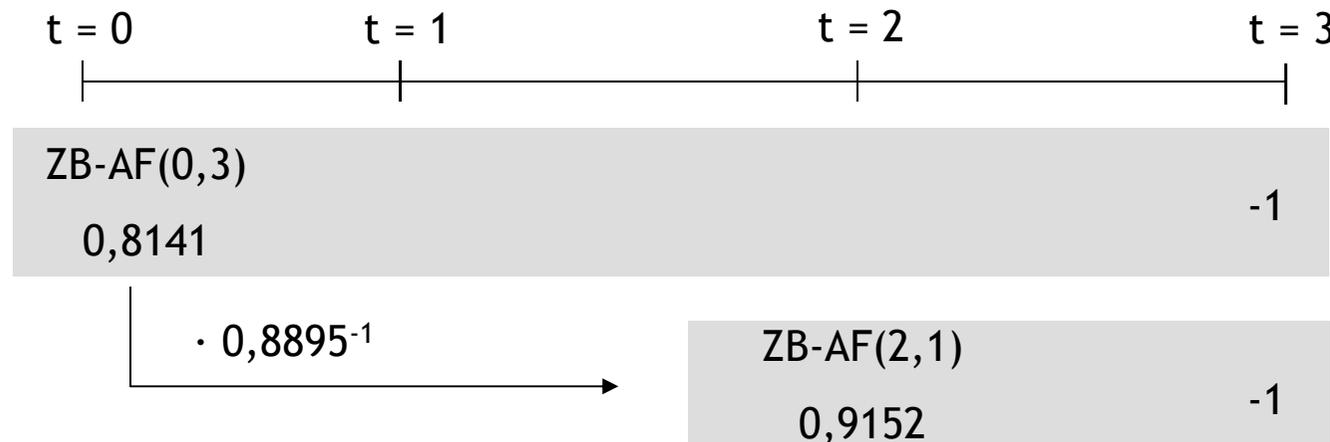
- ▶▶ Beispiel: ZB-AF(2,1)
 - ▶ Zahlung fällt in $2 + 1 = 3$ Jahren an
 - ▶ wird auf $t = 2$ abgezinst

- ▶▶ Vorgehen:
 1. Abzinsen auf $t = 0$
 2. Aufzinsen auf $t = 2$ mit dem Zerobond-Aufzinsfaktor ZB-UF(0,2)



Der Zerobond-Aufzinsfaktor entspricht dem Kehrwert des laufzeitgleichen Zerobond-Abzinsfaktors

$$\Rightarrow \text{ZB-UF}(0,2) = \frac{1}{\text{ZB-AF}(0,2)} = 0,8895^{-1}$$



\Rightarrow Allgemein gilt:

$$\text{ZB-AF}(t, \text{LZ}) = \text{ZB-AF}(0, t + \text{LZ}) \cdot \text{ZB-UF}(0, t)$$

bzw.

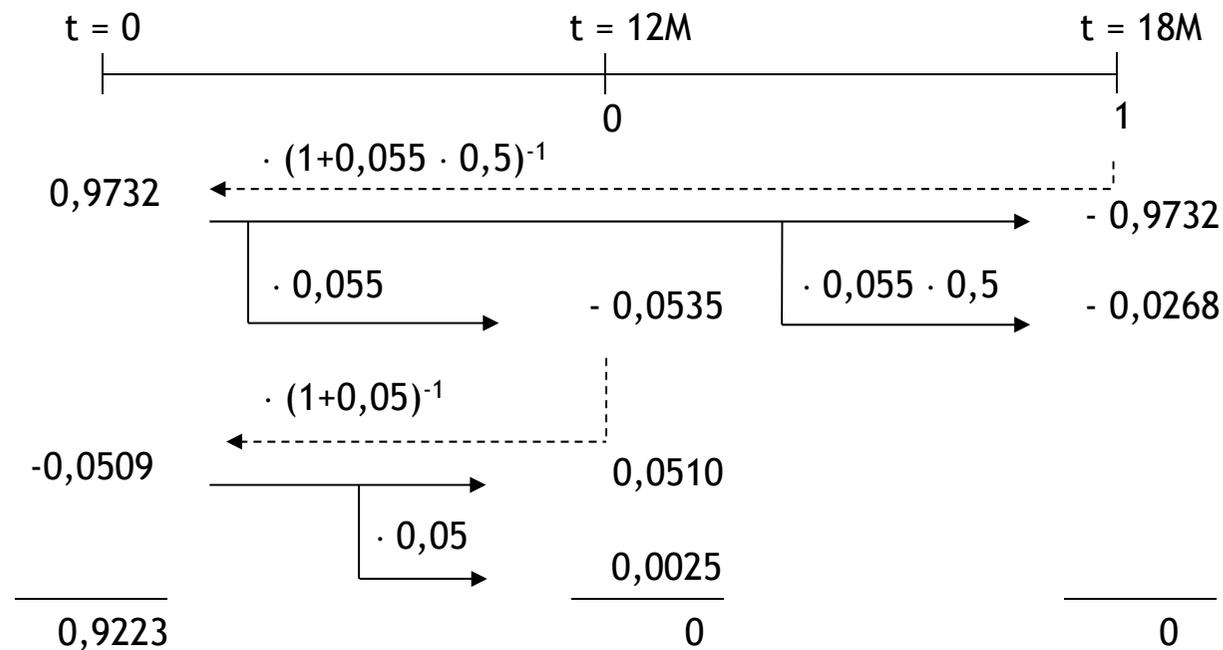
$$\text{ZB-AF}(t, \text{LZ}) = \text{ZB-AF}(0, t + \text{LZ}) \cdot \frac{1}{\text{ZB-AF}(0, t)} = \frac{\text{ZB-AF}(0, t + \text{LZ})}{\text{ZB-AF}(0, t)}$$

Bei über-, aber nicht ganzjährigen Laufzeiten müssen anteilige Zinsen berücksichtigt werden

- ▶ Als Beispiel soll der Zerobond-Abzinsfaktor berechnet werden, der eine Zahlung, die in 18 Monaten anfällt, auf den Zeitpunkt in 6 Monaten abzinst: $ZB-AF(6M,12M)$
 - ▶ Kuponzinsstrukturkurve: $i(0,6M) = 4,00\%$, $i(0,12M) = 5,00\%$, $i(0,18M) = 5,50\%$
- ▶ Benötigt werden die $ZB-AF(0,6M)$ und $ZB-AF(0,18M)$:
$$ZB-AF(6M,12M) = \frac{ZB-AF(0,18M)}{ZB-AF(0,6M)}$$
- ▶ Bestimmung des $ZB-AF(0,6M)$:
$$ZB-AF(0,LZ) = \frac{1}{1 + i \cdot \frac{LZ}{\text{Basis}}} = \frac{1}{1 + 0,04 \cdot \frac{6}{12}} = 0,9804$$
- ▶ Bei der Bestimmung des $ZB-AF(0,18M)$ muss beachtet werden, dass jährlich Zinsen anfallen und auch ausgezahlt werden. Bei einer Laufzeit von 18 Monaten existiert jedoch lediglich der Zinszeitpunkt nach einem Jahr. Die Zinsen für die letzten 6 Monate fallen anteilig an und müssen somit auch in der Berechnung des $ZB-AF$ berücksichtigt werden.

Berechnung des ZB-AF(0,18M)

- Die zu neutralisierende Zahlung in $t = 18M$ von 1 EUR besteht zwar wieder aus Tilgung und Zins, jedoch wird letzterer nur für ein halbes Jahr gezahlt. Die restliche Berechnung erfolgt wie gewohnt.



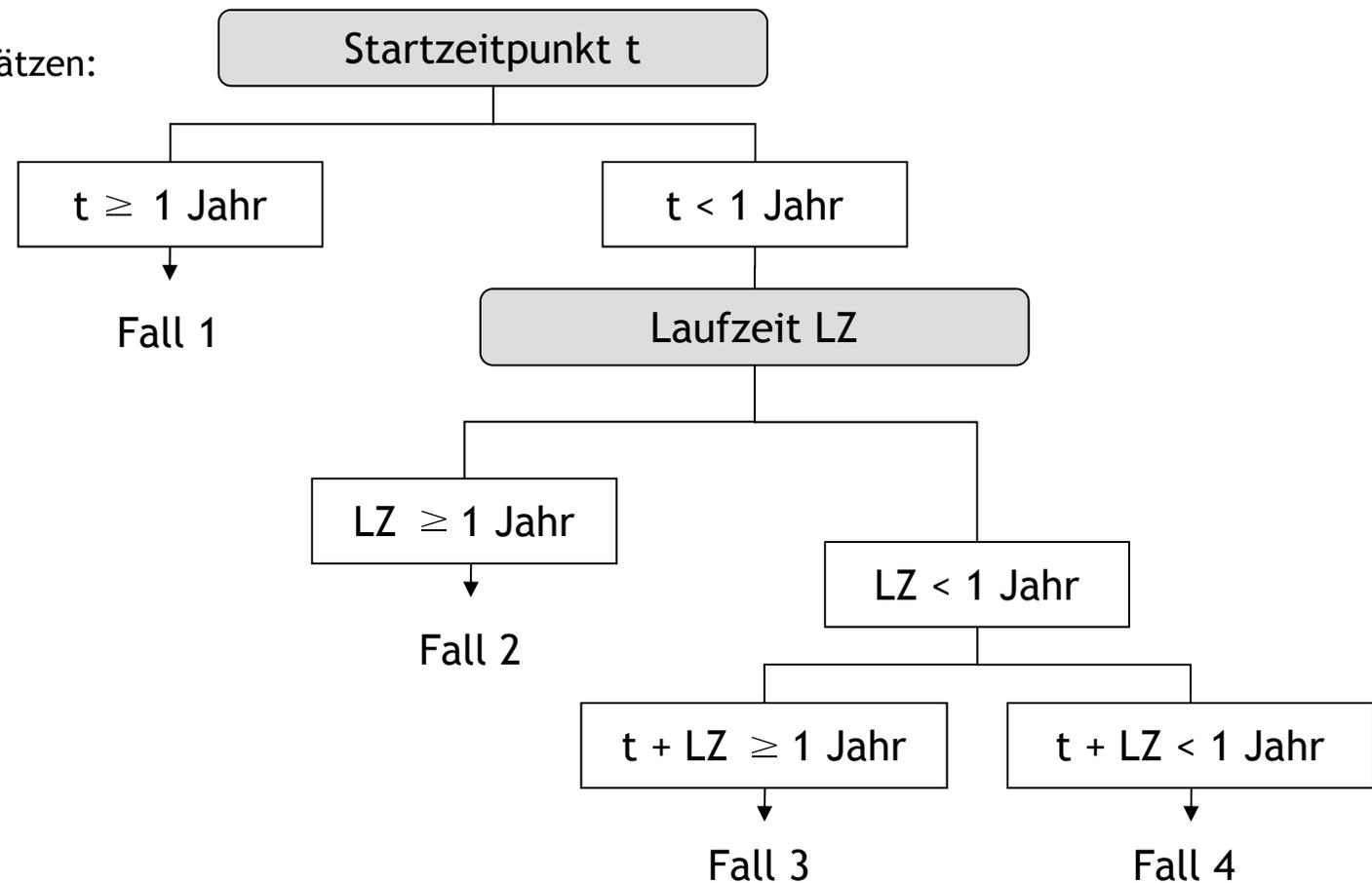
➤
$$\text{ZB-AF}(6M,12M) = \frac{0,9223}{0,9804} = 0,9407$$

Es ergeben sich die folgenden ZB-AFs

t / LZ	6M	12M	18M	24M
0	0,9804	0,9524	0,9223	0,8895
6M	0,9714	0,9407	0,9073	
12M	0,9684	0,9340		
18M	0,9645			

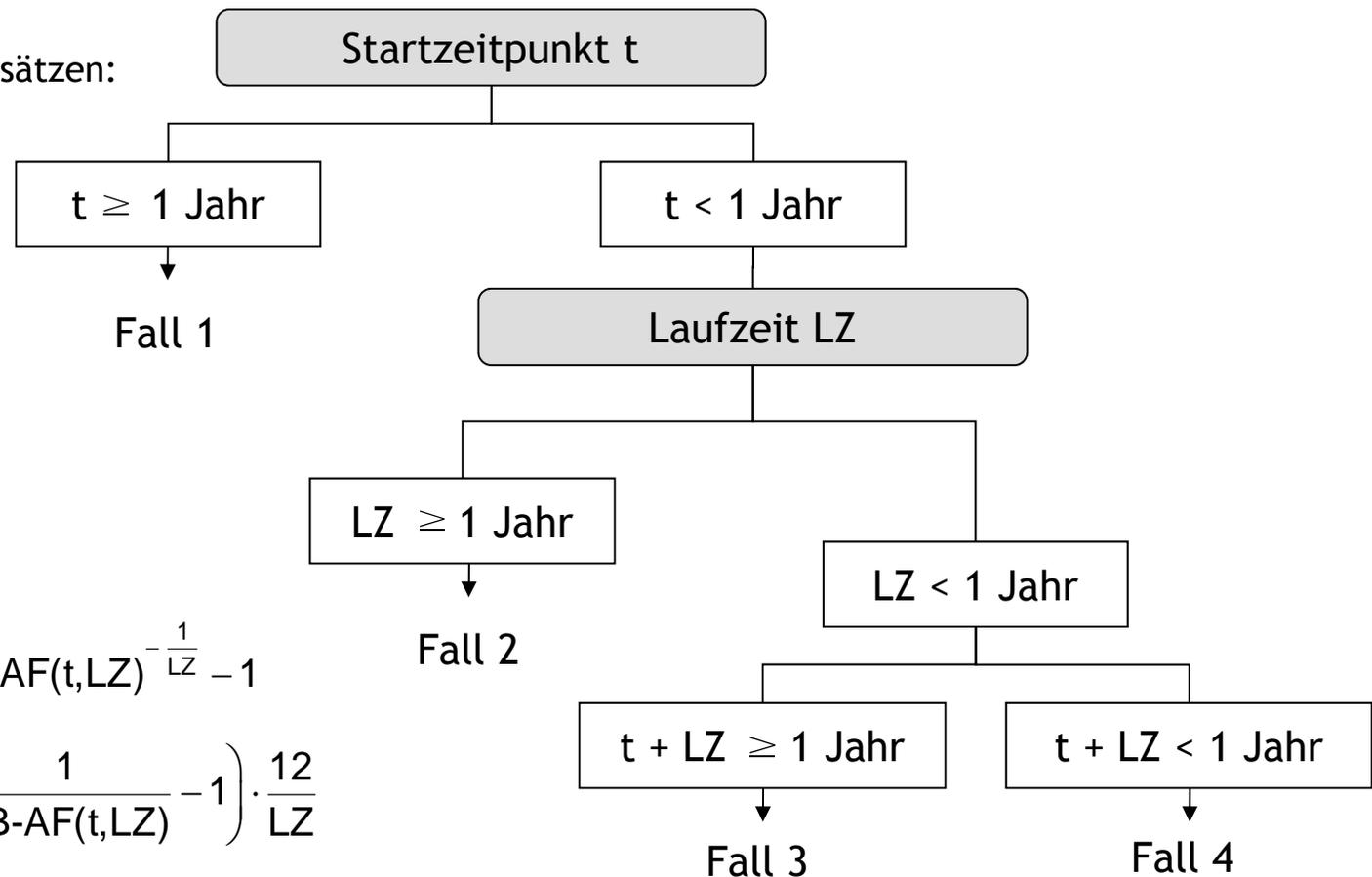
Die Berechnung zukünftiger Nullkuponzinssätze ist über zwei Varianten möglich

► Berechnung aus bereits bekannten Nullkuponzinssätzen:



Die Berechnung zukünftiger Nullkuponzinssätze ist über zwei Varianten möglich

► Berechnung aus bereits bekannten Nullkuponzinssätzen:



► Berechnung aus ZB-AF:

$$t > 12 \text{ Monate: } z(t, LZ) = \text{ZB-AF}(t, LZ)^{-\frac{1}{LZ}} - 1$$

$$t < 12 \text{ Monate: } z(t, LZ) = \left(\frac{1}{\text{ZB-AF}(t, LZ)} - 1 \right) \cdot \frac{12}{LZ}$$

Fall 1: $t \geq 1$, LZ beliebig; t und LZ in Monaten

$$z(t, LZ) = \left(\frac{\left[1 + z(0, t + LZ)\right]^{\frac{t+LZ}{12}}}{\left[1 + z(0, t)\right]^{\frac{t}{12}}} \right)^{\frac{12}{LZ}} - 1$$

- $z(18M, 6M)$: Benötigt werden der $z(0, 24M)$ und der $z(0, 18M)$. Ersterer ist mit 6,03% bekannt, letzterer kann aus dem ZB-AF(0, 18M) berechnet werden:

$$z(0, 18M) = \text{ZB-AF}(0, 18M)^{-\frac{1}{LZ}} - 1 = 0,9223^{-\frac{1}{18}} - 1 = 5,54 \%$$

$$z(18M, 6M) = \left(\frac{\left[1 + z(0, 24M)\right]^{\frac{24}{12}}}{\left[1 + z(0, 18M)\right]^{\frac{18}{12}}} \right)^{\frac{12}{6}} - 1 = \left(\frac{\left[1 + 0,0603\right]^{\frac{24}{12}}}{\left[1 + 0,0554\right]^{\frac{18}{12}}} \right)^{\frac{12}{6}} - 1 = 7,51\%$$

- bzw. $z(18M, 6M) = \text{ZB-AF}(18M, 6M)^{-\frac{1}{6}} - 1 = 0,9645^{-\frac{1}{6}} - 1 = 7,50 \%$

Fall 1: $t \geq 1$, LZ beliebig; t und LZ in Jahren

$$z(t, LZ) = \left(\frac{[1 + z(0, t + LZ)]^{t+LZ}}{[1 + z(0, t)]^t} \right)^{\frac{1}{LZ}} - 1$$

► $z(1,2)$: Benötigt werden der $z(0,3)$ und der $z(0,1)$. Beide sind bekannt:

$$z(0,3) = 7,10\% \quad z(0,1) = 5,00\%$$

$$z(1,2) = \left(\frac{[1 + z(0,3)]^3}{[1 + z(0,1)]^1} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{[1 + 0,071]^3}{[1 + 0,05]^1} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 8,17\%$$

► bzw.
$$z(1,2) = \text{ZB-AF}(1,2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{\text{ZB-AF}(0,3)}{\text{ZB-AF}(0,1)} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{0,8141}{0,9524} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1$$
$$= 0,8548^{-\frac{1}{2}} - 1 = 8,16\%$$

Fall 2: $t < 1$ Jahr, $LZ \geq 1$ Jahr, t und LZ in Monaten

$$z(t, LZ) = \left(\frac{[1 + z(0, t + LZ)]^{\frac{t+LZ}{12}}}{1 + z(0, t) \cdot \frac{t}{12}} \right)^{\frac{12}{LZ}} - 1$$

➡ z.B.: $z(6M, 12M)$

$$z(6M, 12M) = \left(\frac{[1 + z(0, 18M)]^{\frac{18}{12}}}{1 + z(0, 6M) \cdot \frac{6}{12}} \right)^{\frac{12}{12}} - 1 = \left(\frac{[1 + 0,554]^{\frac{18}{12}}}{1 + 0,04 \cdot \frac{6}{12}} \right)^{\frac{12}{12}} - 1 = 6,30 \%$$

➡ bzw. $z(6M, 12M) = (ZB-AF(6M, 12M)^{-1} - 1) \cdot \frac{12}{12} = (0,9407^{-1} - 1) \cdot 1 = 6,30 \%$

Fall 3: $t, LZ < 1$ Jahr, $t + LZ \geq 1$ Jahr, t und LZ in Monaten

$$z(t, LZ) = \left(\frac{[1 + z(0, t + LZ)]^{\frac{t+LZ}{12}}}{1 + z(0, t) \cdot \frac{t}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{LZ}$$

➡ z.B.: $z(6M, 6M)$

$$z(6M, 6M) = \left(\frac{[1 + z(0, 12M)]^{\frac{12}{12}}}{1 + z(0, 6M) \cdot \frac{6}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{6} = \left(\frac{[1 + 0,05]^{\frac{12}{12}}}{1 + 0,04 \cdot \frac{6}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{6} = 5,88\%$$

➡ bzw. $z(6M, 6M) = \left(\frac{1}{ZB-AF(6M, 6M)} - 1 \right) \cdot \frac{12}{6} = (0,9714^{-1} - 1) \cdot \frac{12}{6} = 5,89\%$

Fall 4: $t, LZ < 1$ Jahr, $t + LZ < 1$ Jahr, t und LZ in Monaten

$$z(t, LZ) = \left(\frac{1 + z(0, t + LZ) \cdot \frac{t + LZ}{12}}{1 + z(0, t) \cdot \frac{t}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{LZ}$$

➤ z.B.: $z(3M, 3M)$

$$z(3M, 3M) = \left(\frac{1 + z(0, 6M) \cdot \frac{6}{12}}{1 + z(0, 3M) \cdot \frac{3}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{3} = \left(\frac{1 + 0,04 \cdot \frac{6}{12}}{1 + 0,03 \cdot \frac{3}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{3} = 4,96\%$$

➤ bzw. $z(3M, 3M) = \left(\frac{1}{\text{ZB-AF}(3M, 3M)} - 1 \right) \cdot \frac{12}{3} = \left(\frac{1}{\frac{\text{ZB-AF}(0, 6M)}{\text{ZB-AF}(0, 3M)}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{3} = \left(\frac{1}{\frac{0,9804}{0,9926}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{3} = 4,98\%$

Es ergeben sich die folgenden Nullkuponzinssätze

t / LZ	6M	12M	18M	24M
0	4,00%	5,00%	5,54%	6,03%
6M	5,89%	6,30%	6,81%	
12M	6,63%	7,07%		
18M	7,50%			

Zukünftige Kuponzinssätze (Forward-Rates)

- bei Laufzeiten von einem Jahr oder weniger identisch mit zukünftigen Nullkuponzinssätzen
- Laufzeiten über einem Jahr:

$$i(t, LZ) = \frac{1 - ZB-AF(t, LZ)}{\sum_{n=1}^{LZ} ZB-AF(t, n)}$$

bzw.

$$i(t, 1) = \frac{ZB-AF(0, t)}{ZB-AF(0, t+1)} - 1$$

- Beispiel: $i(1, 2)$

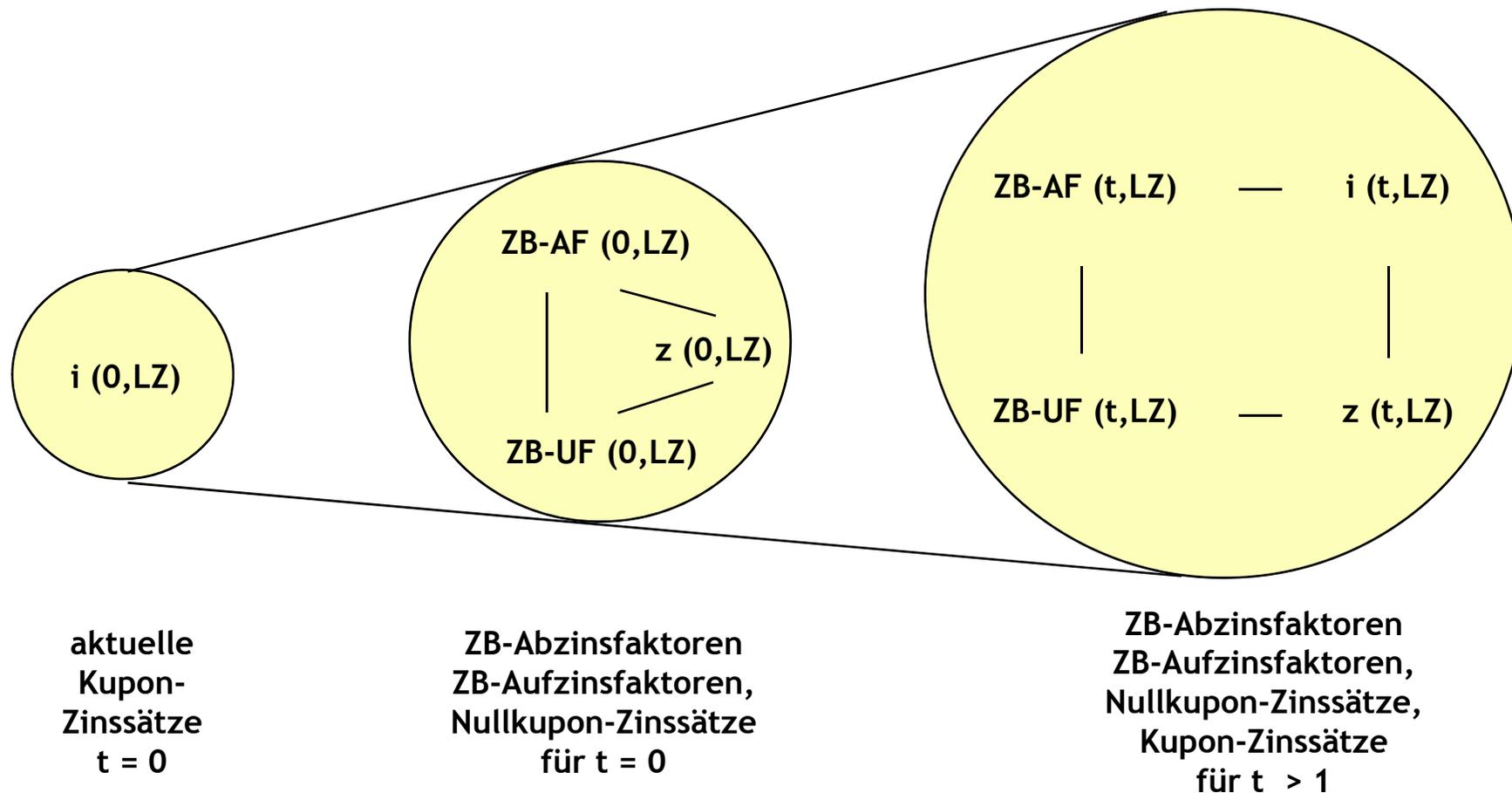
$$i(1, 2) = \frac{1 - ZB-AF(1, 2)}{\sum_{n=1}^2 ZB-AF(1, n)} = \frac{1 - ZB-AF(1, 2)}{ZB-AF(1, 1) + ZB-AF(1, 2)} = \frac{1 - 0,8548}{0,9340 + 0,8548} = 8,12\%$$

- Nun ist auch der direkte Übergang von Nullkuponzinssätzen zu Kuponzinssätzen möglich;

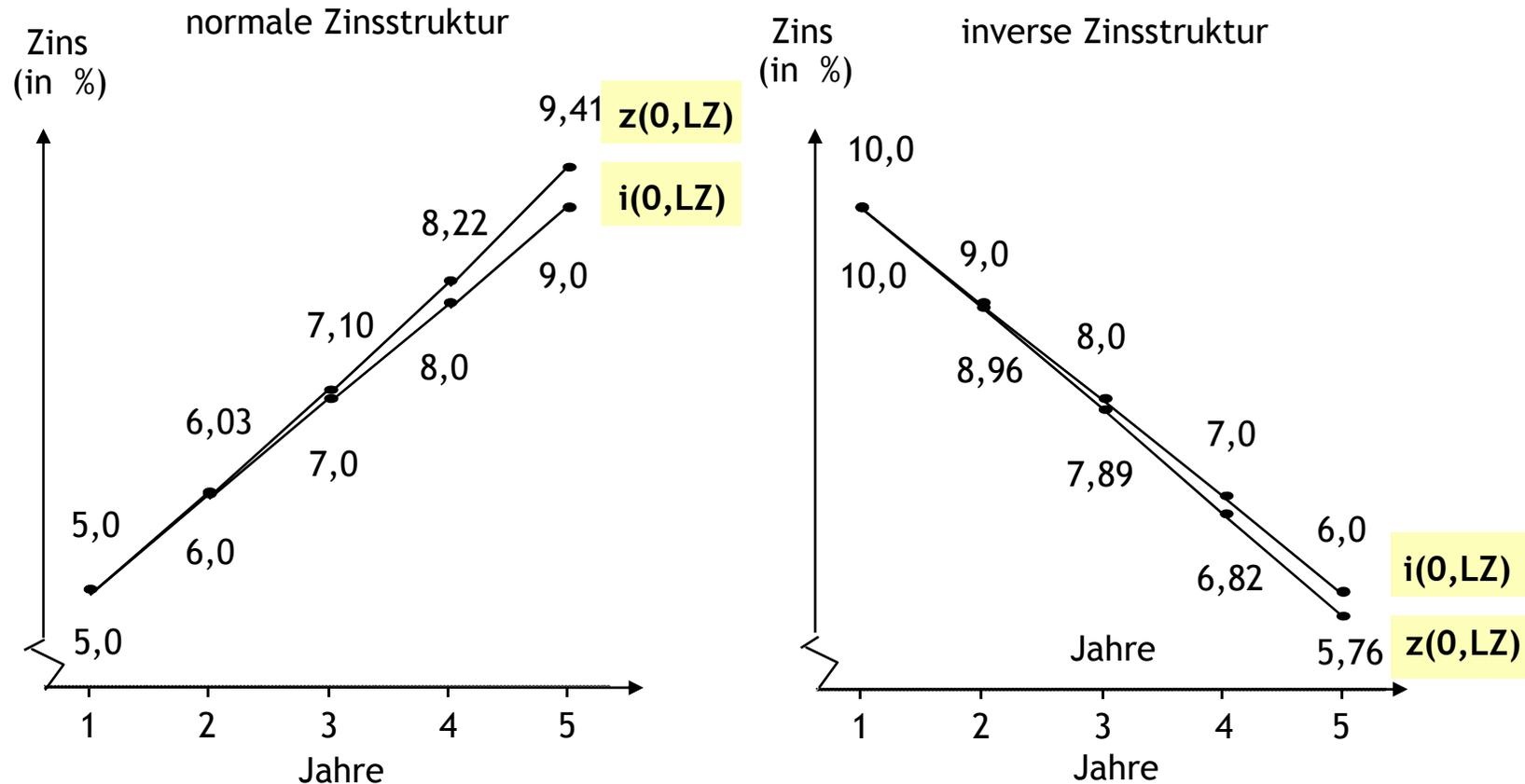
$$i(t, LZ) = \frac{1 - (1 + z(t, LZ))^{-LZ}}{\sum_{n=1}^{LZ} (z(t, n) + 1)^{-n}}$$

$$i(1, 2) = \frac{1 - (1 + z(1, 2))^{-2}}{\sum_{n=1}^2 (z(1, n) + 1)^{-n}} = \frac{1 - (1 + z(1, 2))^{-2}}{(z(1, 1) + 1)^{-1} + (z(1, 2) + 1)^{-2}} = \frac{1 - (1,0817)^{-2}}{1,0707^{-1} + 1,0817^{-2}} = 8,13\%$$

Ausgehend von den Kuponzinssätzen können sämtliche Nullkuponzinssätze und Zerobond-Abzinsfaktoren berechnet werden

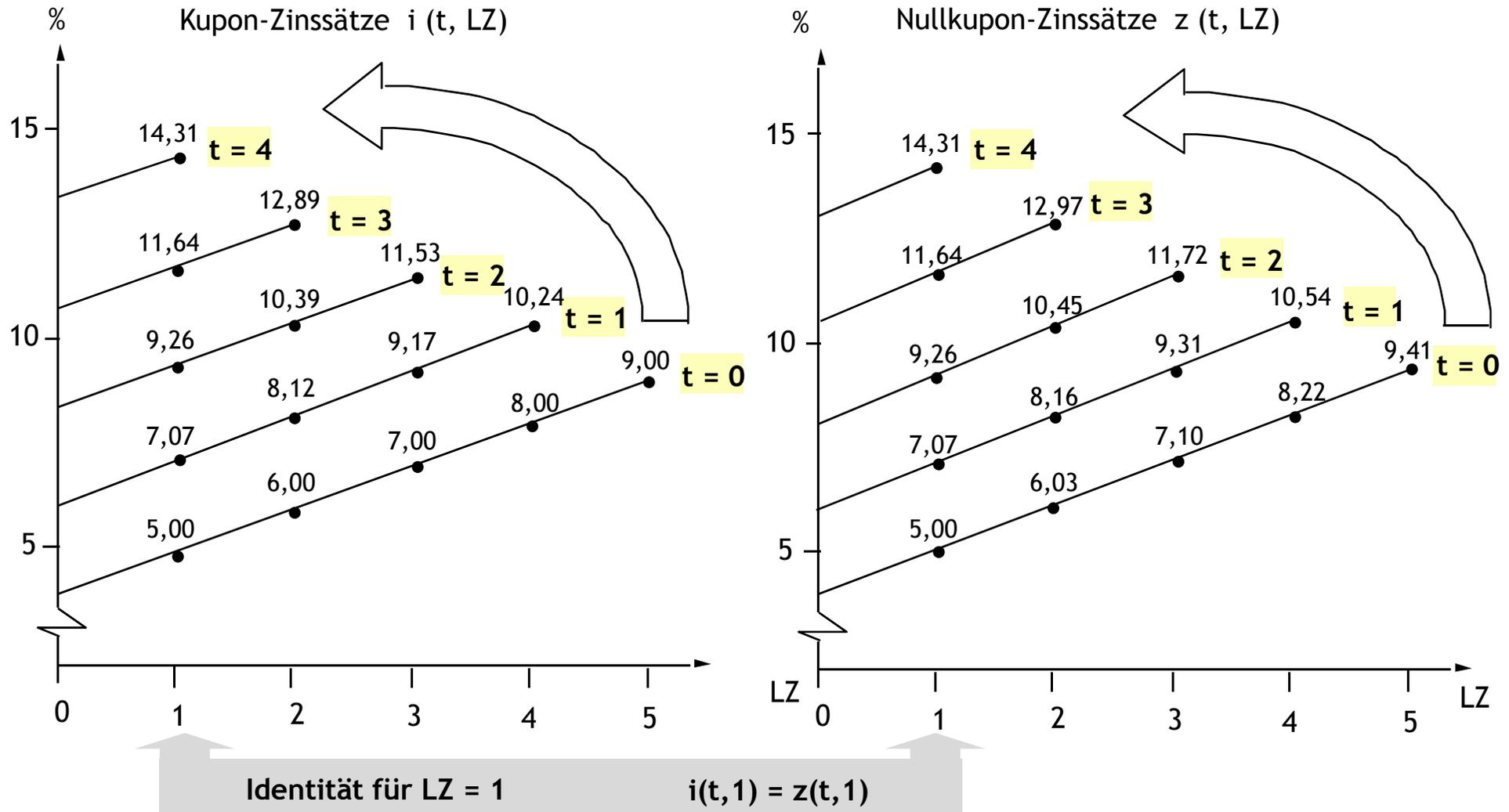


Kupon- und Nullkupon-Zinsstrukturkurven im Vergleich



► Nullkuponzinssätze sind bei einer normalen Zinsstruktur immer größer als die entsprechenden Kuponzinssätze, da sie den Zinseszinsseffekt mit berücksichtigen

Zukünftige, deterministische Zinsstrukturkurven



Übergang zu stetigen Zinssätzen $r(t, LZ)$

- ▶ Bisher wurde angenommen, dass die Zinsen an eindeutig definierten Zahlungszeitpunkten anfallen. Vergrößert man die Anzahl der Zahlungstermine, werden die Zinsperioden immer kleiner und man gelangt schließlich zur stetigen Verzinsung
- ▶ Jede Zinszahlung wird unmittelbar wieder angelegt, daher auch: Kontinuierliche Verzinsung
- ▶ stetiger Zinssatz: $r(0, LZ) = \ln(1 + z(0, LZ))$ $LZ > 1$ Jahr
- ▶ der Faktor $e^{r(t, LZ) \cdot LZ}$ zinst eine Zahlung auf, der Faktor $e^{-r(t, LZ) \cdot LZ}$ zinst diese entsprechend ab
- ▶ gleiche Funktionsweise wie Zerobond-Abzinsfaktoren, daher gilt: $e^{-r(t, LZ) \cdot LZ} = \text{ZB-AF}(t, LZ)$
- ▶ Beispiel: $z(0, 1) = 5,00\%$ $z(0, 2) = 6,03\%$
 $r(0, 1) = \ln(1 + z(0, 1)) = \ln(1,05) = 4,88\%$ $r(0, 2) = \ln(1 + z(0, 2)) = \ln(1,0603) = 5,86\%$
 $\text{ZB-AF}(0, 1) = e^{-0,0488 \cdot 1} = 0,9524$ ✓ $\text{ZB-AF}(0, 2) = e^{-0,0586 \cdot 2} = 0,8895$ ✓

Zukünftige stetige Zinssätze

$$r(t, LZ) = \frac{r(0, t + LZ) \cdot (t + LZ) - r(0, t) \cdot t}{LZ}$$

▶▶ Beispiel: $r(1, 1)$

$$r(1, 1) = \frac{r(0, 2) \cdot 2 - r(0, 1) \cdot 1}{1} = \frac{0,0586 \cdot 2 - 0,0488 \cdot 1}{1} = 6,84\%$$

$$ZB-AF(1, 1) = e^{-0,0684 \cdot 1} = 0,9339 \quad \checkmark \text{ (Rundungsfehler)}$$

▶▶ Für ungerade Laufzeiten und Bewertungszeitpunkte erfolgt die Berechnung analog, lediglich für die Kombination aus heutigem Bewertungszeitpunkt und unterjähriger Laufzeit bedarf es einer gesonderten Berechnung

Unterjährige stetige Zinssätze bei $LZ < Basis$

$$r(0, LZ) = \frac{\ln\left(1 + z(0, LZ) \cdot \frac{LZ}{Basis}\right)}{\frac{LZ}{Basis}}$$

$LZ < Basis$

▶ Beispiel: $r(1, 6M)$

$$r(0, 6M) = \frac{\ln\left(1 + 0,04 \cdot \frac{6}{12}\right)}{\frac{6}{12}} = 3,96\%$$

$$ZB-AF(0, 6M) = e^{-0,0396 \cdot \frac{6}{12}} = 0,9804 \quad \checkmark$$

Übung Teil II

- ➔ Berechnen Sie, ausgehend von der Kuponzinsstrukturkurve, die zukünftigen / unterjährigen Zinssätze / Abzinsfaktoren!

ZB-AF(t,LZ)

t \ LZ	0,5	1	1,5	2
0				
0,5				
1				
1,5				

z(t,LZ) in %

t \ LZ	0,5	1	1,5	2
0				
0,5				
1				
1,5				

i(t,LZ) in %

t \ LZ	1	2	3	4
0	3,00	4,00	5,00	6,00
1				
2				
3				

Der Zinssatz für 6 Monate betrage 2,00%, derjenige für 18 Monate 3,50%.

Lösung: Übung Teil II

- Berechnen Sie, ausgehend von der Kuponzinsstrukturkurve, die zukünftigen / unterjährigen Zinssätze / Abzinsfaktoren!

ZB-AF(t,LZ)

t \ LZ	0,5	1	1,5	2
0	0,9901	0,9709	0,9494	0,9242
0,5	0,9806	0,9589	0,9334	
1	0,9779	0,9519		
1,5	0,9734			

z(t,LZ) in %

t \ LZ	0,5	1	1,5	2
0	2,00	3,00	3,52	4,02
0,5	3,96	4,29	4,76	
1	4,57	5,05		
1,5	5,54			

i(t,LZ) in %

t \ LZ	1	2	3	4
0	3,00	4,00	5,00	6,00
1	5,05	6,09	7,13	
2	7,19	8,30		
3	9,51			

Der Zinssatz für 6 Monate betrage 2,00%, derjenige für 18 Monate 3,50%.

Wiederholung I Barwertberechnung

➡ Es gelte die folgende Nullkuponzinsstrukturkurve:

1 Jahr: 3,50%

2 Jahre: 4,30%

3 Jahre: 4,70%

4 Jahre: 5,50%

a) Berechnen Sie den Barwert der folgenden Anleihe mit

a₁) der angegebenen Nullkuponzinsstrukturkurve

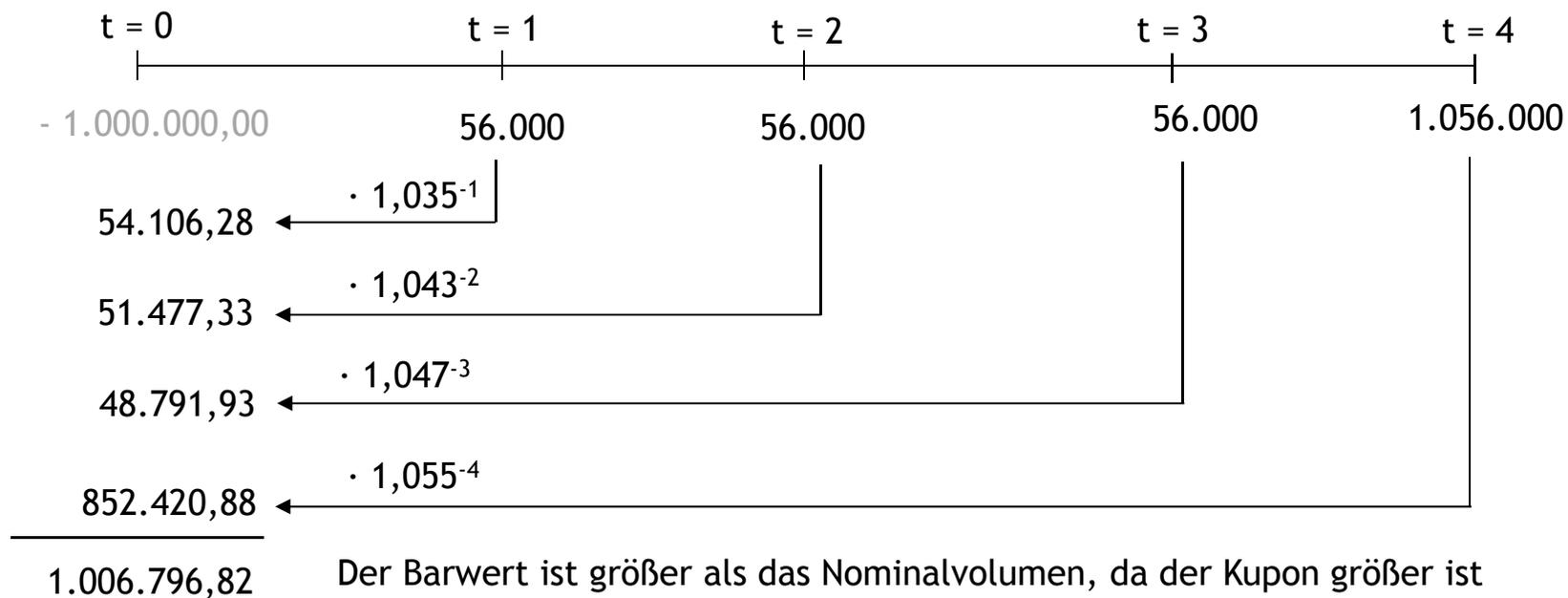
a₂) aus der angegebenen Nullkuponzinsstrukturkurve berechneten Zerobond-
Abzinsfaktoren.

Laufzeit	4 Jahre
Kuponzinssatz	5,60%
Nominalvolumen	1.000.000
Tilgung	endfällig

Lösung Wiederholung I

Jahr t	1	2	3	4
Nullkupon $i(0,t)$	3,50%	4,30%	4,70%	5,50%

Kupon 5,60%



Der Barwert ist größer als das Nominalvolumen, da der Kupon größer ist als der laufzeitgleiche Zins der Zinsstrukturkurve.

Lösung Wiederholung I

Berechnung der Abzinsfaktoren aus Nullkuponzinsen:

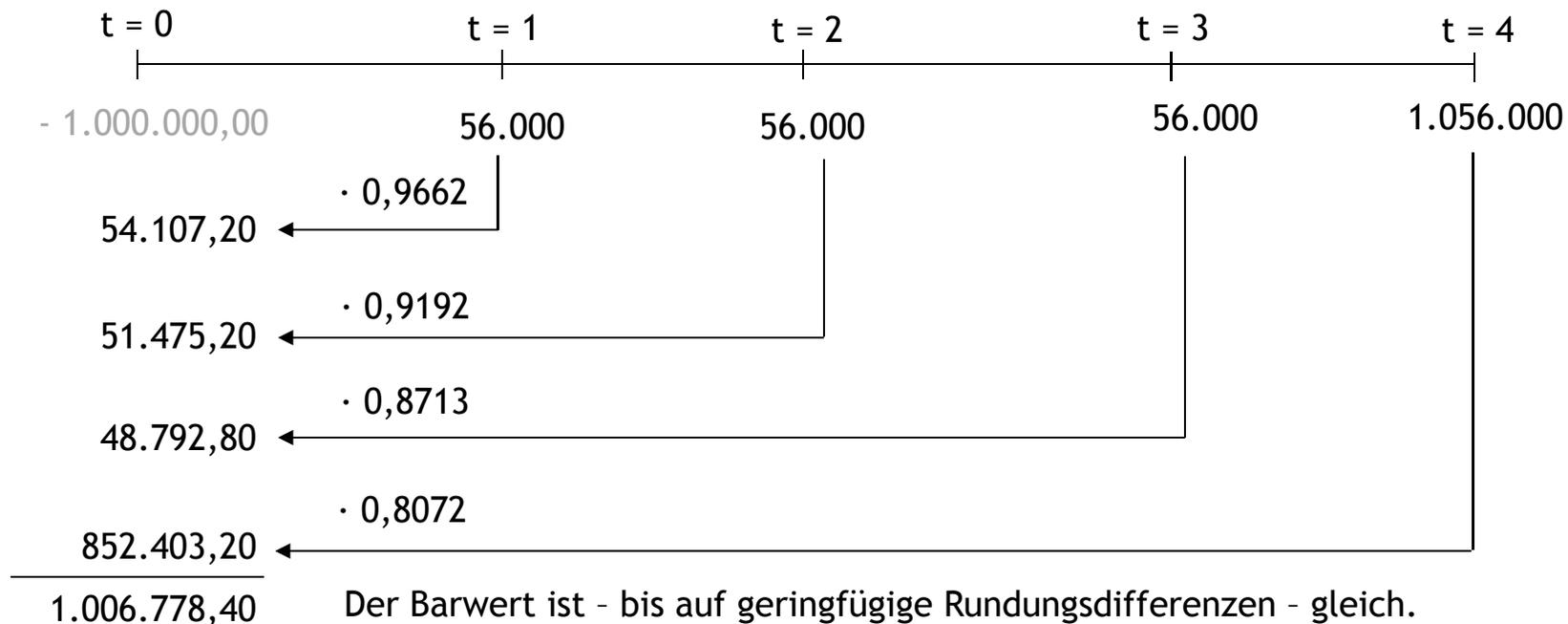
$$ZB-AF(t, LZ) = (1 + z(t, LZ))^{-LZ}$$

$$ZB-AF(0, 1) = (1 + z(0, 1))^{-1} = 1,035^{-1} = 0,9662$$

$$ZB-AF(0, 3) = (1 + z(0, 3))^{-3} = 1,047^{-3} = 0,8713$$

$$ZB-AF(0, 2) = (1 + z(0, 2))^{-2} = 1,043^{-2} = 0,9192$$

$$ZB-AF(0, 4) = (1 + z(0, 4))^{-4} = 1,055^{-4} = 0,8072$$



Wiederholung II Barwertberechnung Floater

➤ Floater: Variabel verzinsliche Anleihe

➤ Es gelte die folgende Nullkuponzinsstrukturkurve:

1 Jahr: 3,50%

2 Jahre: 4,30%

3 Jahre: 4,70%

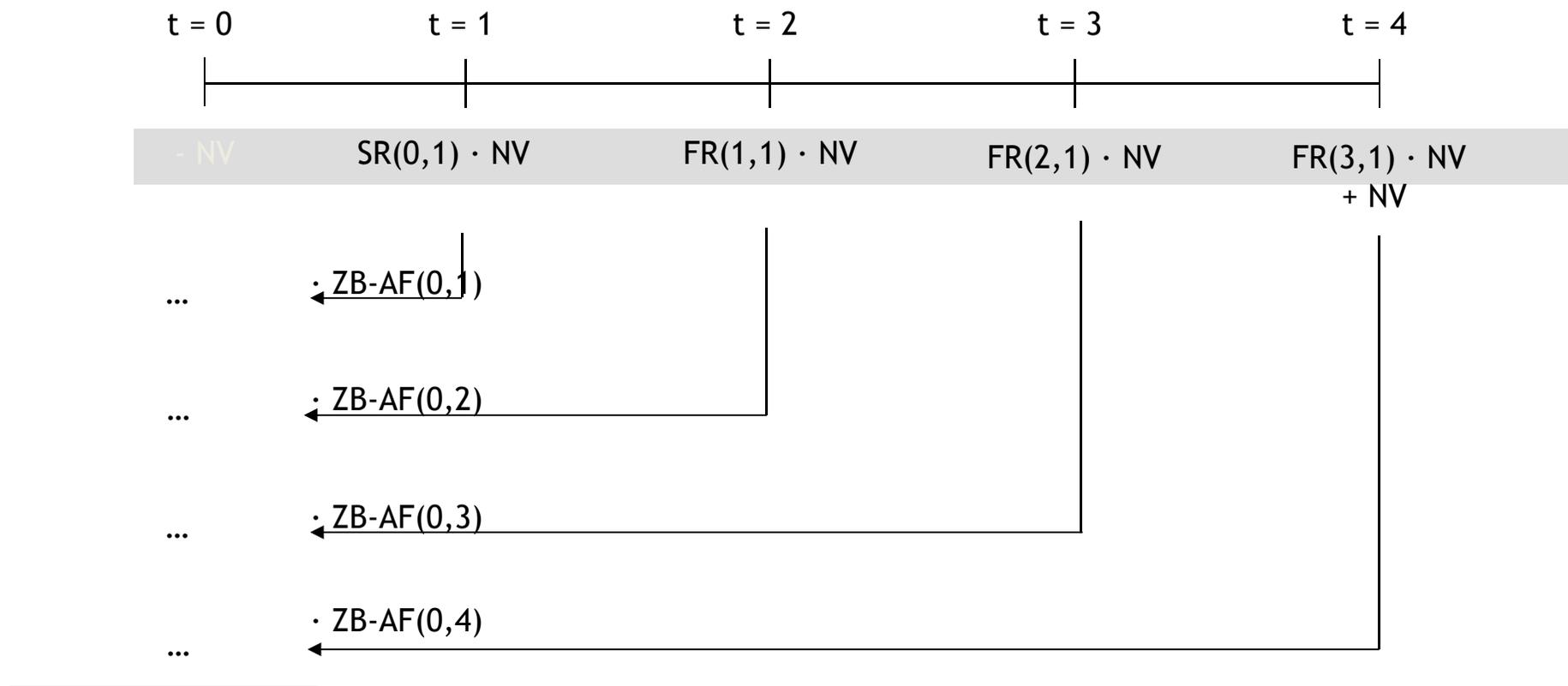
4 Jahre: 5,50%

➤ Berechnen Sie den Barwert der folgenden Anleihe:

Laufzeit	4 Jahre
Nominalvolumen	1.000.000
Tilgung	endfällig

➤ Bestimmen Sie dazu zuerst die Forward Rates. Diese bestimmen die Höhe der jeweiligen Zinszahlung. Im Anschluss wird der CF (Cash Flow) mit den Nullkuponzinsen oder den ZB-AF abgezinst.

Wiederholung II Barwert der variablen Seite



Wiederholung II Barwertberechnung

► Für die Bestimmung der Kupon-Forwards gilt:
$$FR(t,LZ) = \frac{1 - ZB-AF(t,LZ)}{\sum_{n=1}^{LZ} ZB-AF(t,n)}$$

bzw.
$$FR(t,1) = \frac{ZB-AF(0,t)}{ZB-AF(0,t+1)} - 1$$

$SR(0,1) = \text{aktueller Kuponzins} = 3,5\%$

$$FR(1,1) = \frac{1 - ZB-AF(1,1)}{\sum_{n=1}^1 ZB-AF(1,n)} = \frac{1 - ZB-AF(1,1)}{ZB-AF(1,1)} = \frac{1 - 0,9513}{0,9513} = 5,12\%$$

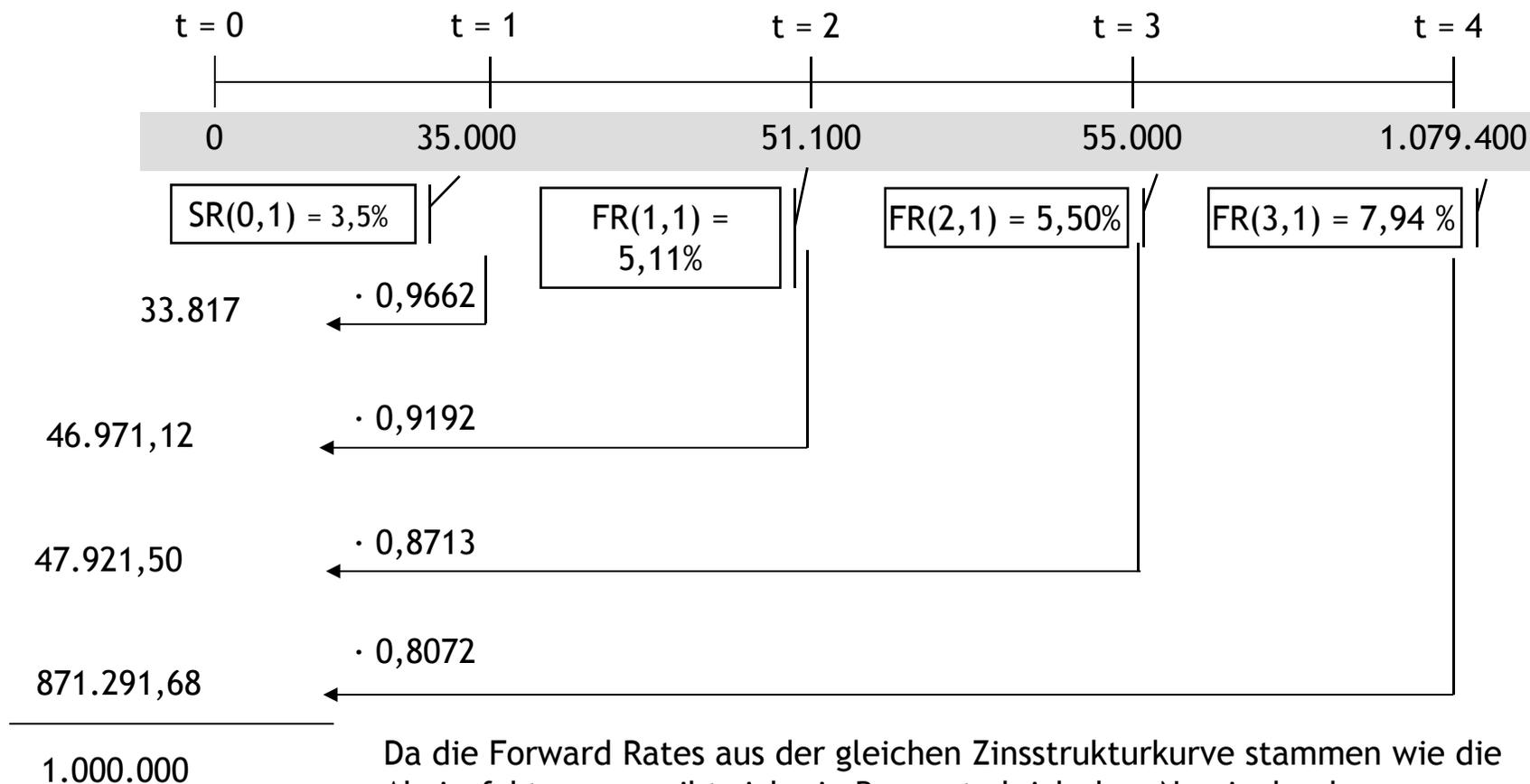
$$\text{mit } ZB-AF(1,1) = \frac{ZB-AF(0,2)}{ZB-AF(0,1)} = 1 - \frac{0,9192}{0,9662} = 0,9513$$

$$\text{oder: } FR(1,1) = \frac{ZB-AF(0,1)}{ZB-AF(0,2)} - 1 = \frac{0,9662}{0,9192} - 1 = 5,11\%$$

$$FR(2,1) = \frac{ZB-AF(0,2)}{ZB-AF(0,3)} - 1 = \frac{0,9192}{0,8713} - 1 = 5,50\%$$

$$FR(3,1) = \frac{ZB-AF(0,3)}{ZB-AF(0,4)} - 1 = \frac{0,8713}{0,8072} - 1 = 7,94\%$$

Wiederholung II Barwertberechnung



Da die Forward Rates aus der gleichen Zinsstrukturkurve stammen wie die Abzinsfaktoren, ergibt sich ein Barwert gleich dem Nominal-volumen.

Agenda

- Finanzmathematische Grundbegriffe
- Varianten der Barwertbestimmung
- Berechnung von Zinssätzen bei beliebigen Startzeitpunkten und Laufzeiten
- Statistische Grundlagen

Diskrete Zufallsvariable

- ▶ eine Zufallsvariable X heißt diskret, wenn sie höchstens abzählbar viele Werte annehmen kann
- ▶ die Wahrscheinlichkeit P , mit der eine Zufallsvariable X eine bestimmte Realisation x_i annimmt, ergibt sich als Summe der Wahrscheinlichkeiten derjenigen Elementarereignisse e_j , denen die Ausprägung x_i zugeordnet ist:

$$P(X = x_i) = \sum_{X(e_j)=x_i} P(e_j)$$

- ▶ für die Wahrscheinlichkeit P muss gelten:

$$P(X = x_i) > 0; \sum_i P(X = x_i) = 1$$

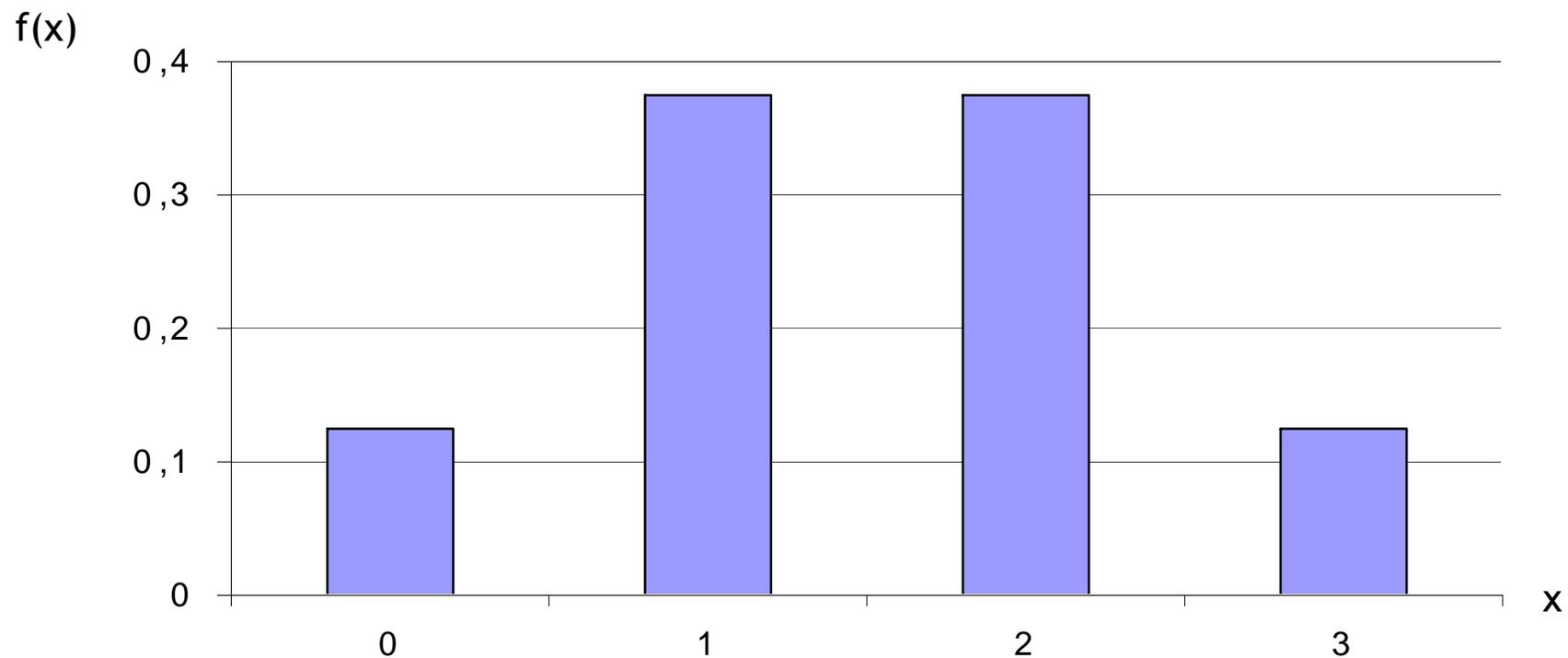
Beispiel

➤ Anzahl der ungeraden Zahlen bei dreimaligem Werfen eines Würfels

Elementarereignis e	Wahrscheinlichkeit $P(e)$	Anzahl „ungerade Zahl“ x	Wahrscheinlichkeit $P(X=x)=f(x)$
$e_1=GGG$	$P(e_1)=0,125$	$x_1=0$	$f(x_1)=0,125$
$e_2=GGU$ $e_3=GUG$ $e_4=UGG$	$P(e_2)=0,125$ $P(e_3)=0,125$ $P(e_4)=0,125$	$x_2=1$	$f(x_2)=0,375$
$e_5=GUU$ $e_6=UUG$ $e_7=UGU$	$P(e_5)=0,125$ $P(e_6)=0,125$ $P(e_7)=0,125$	$x_2=2$	$f(x_3)=0,375$
$e_8=UUU$	$P(e_8)=0,125$	$x_3=3$	$f(x_4)=0,125$

Graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion

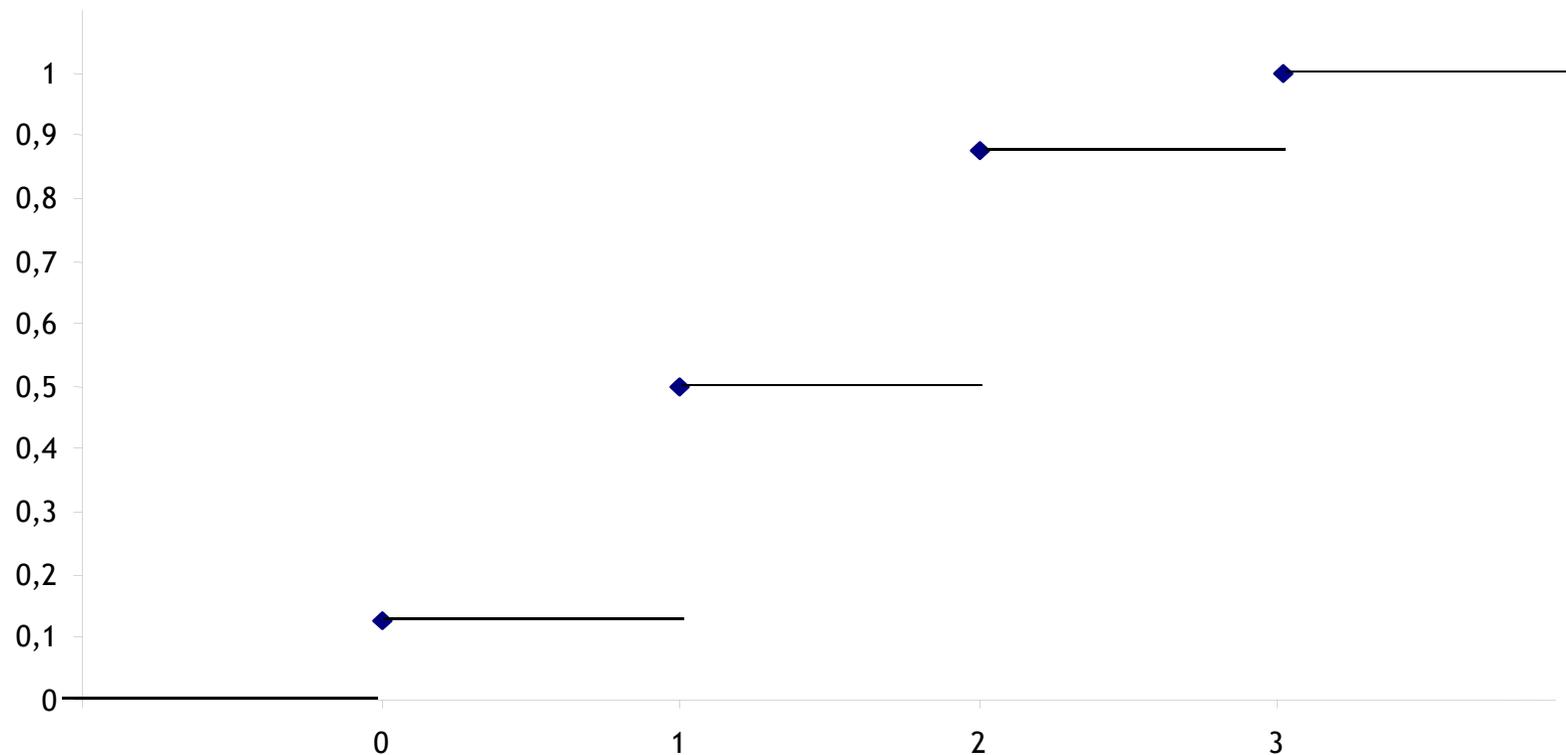
Werte von X	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,125	0,375	0,375	0,125



Verteilungsfunktion

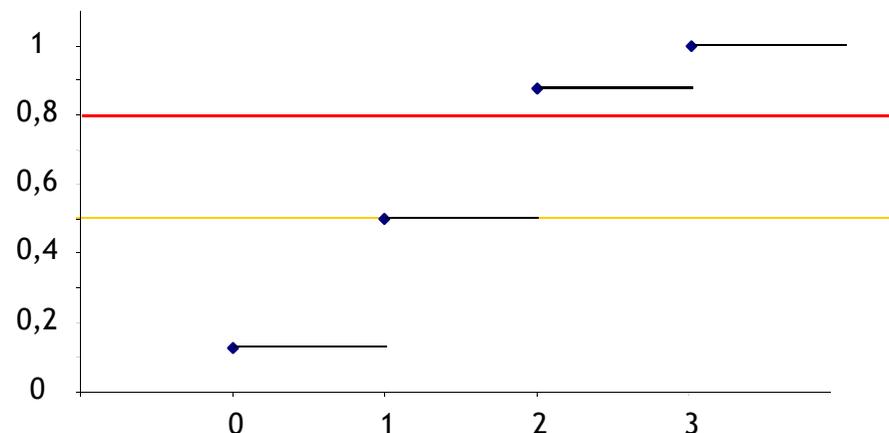
- Die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Zufallsvariablen X gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Zufallsvariable X höchstens die Realisation x annimmt:

$$F(x) = P(X \leq x)$$



Quantile aus der Verteilungsfunktion

- ➔ Ein Zahlenwert λ_α heißt α -Quantil der Zufallsvariablen X , wenn gilt:
 $P(X \leq \lambda_\alpha) \geq \alpha$ und $P(X \geq \lambda_\alpha) > 1 - \alpha$



- ➔ gesucht: 0,8-Quantil

Das 0,8-Quantil ist derjenige Wert, dessen kumulierte Wahrscheinlichkeit größer oder gleich 0,8 ist, d.h. derjenige Wert, dessen „Linie“ als erstes die rote Linie übersteigt oder erreicht: $\lambda_{0,8} = 2$.

- ➔ gesucht: 0,5-Quantil

Die kumulierte Wahrscheinlichkeit der Ausprägung „1“ ist genau 0,5, so dass dieser Wert das 0,5-Quantil darstellt: $\lambda_{0,5} = 1$.

Empirisches Quantil einer Messreihe

- Liegt eine Messreihe $\Delta V_1, \dots, \Delta V_n$ empirischer Wertänderungen vor, berechnet sich das empirische Quantil zu:

$$\lambda_\alpha = \Delta V_{[gT(N \cdot p)+1]}, \text{ wobei } gT(\alpha) = \text{ganzzahliger Teil von } \alpha$$

- Somit ist λ_α in der geordneten Stichprobe $\Delta V_{[1]} \leq \Delta V_{[2]} \leq \dots \leq \Delta V_{[N]}$ der $(gT(N \cdot p)+1)$ -te Wert:

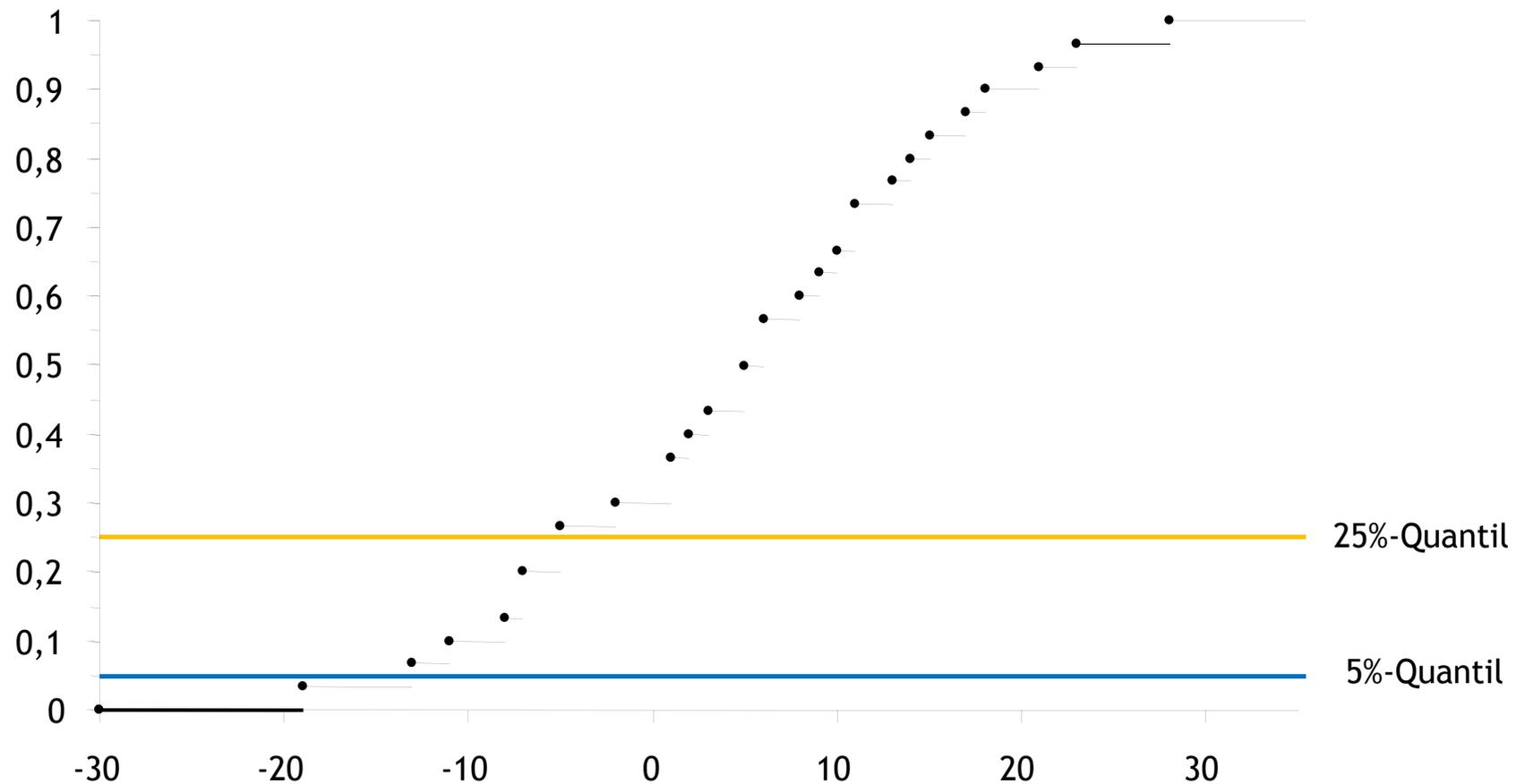
gesucht ist das 5,00 %-Quantil:

- $N \cdot p = 30 \cdot 0,05 = 1,5$
ganzzahliger Teil von 1,5 ist 1
- $\lambda_\alpha = \Delta V_{[1+1]} = -13$

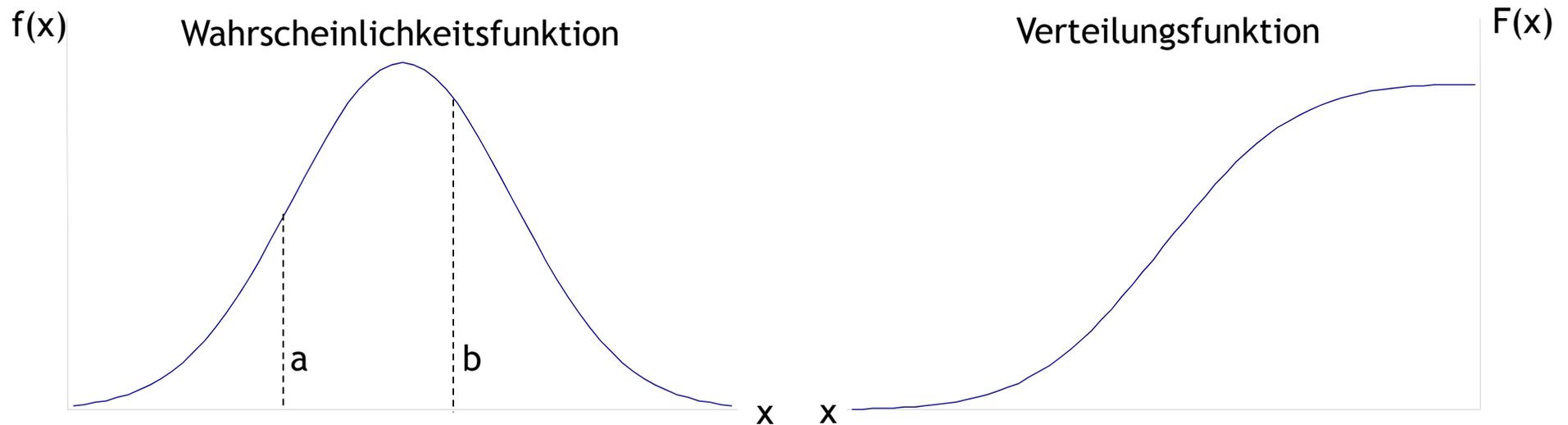
Lfd. Nr.	ΔV
1	-19
2	-13
3	-11
4	-8
5	-7
6	-7
7	-5
8	-5
9	-2
10	1
11	1
12	2
13	3
14	5
15	5

Lfd. Nr.	ΔV
16	6
17	6
18	8
19	9
20	10
21	11
22	11
23	13
24	14
25	15
26	17
27	18
28	21
29	23
30	28

Die Quantile lassen sich ebenfalls aus der empirischen Verteilungsfunktion ablesen



Stetige Zufallsvariable



Eigenschaften:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

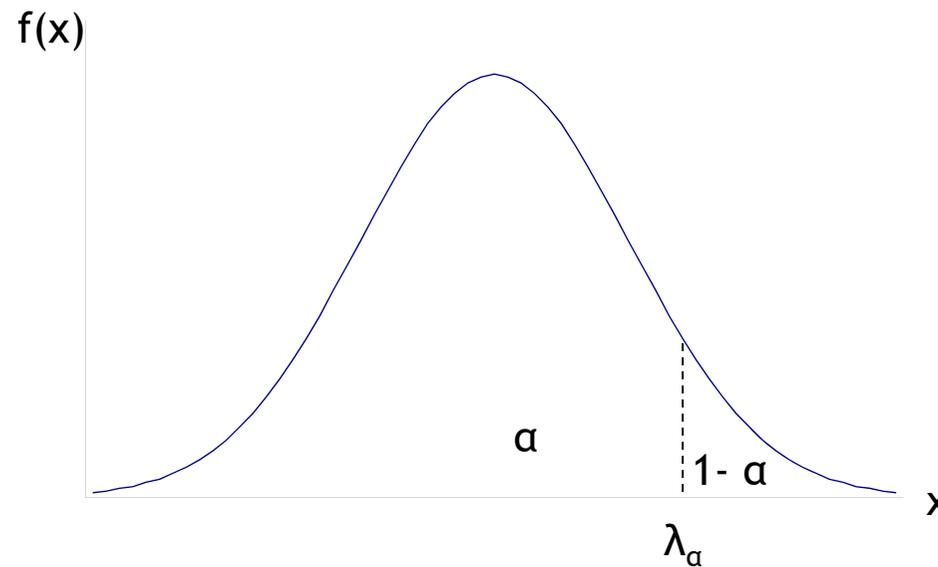
$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Quantile einer stetigen Zufallsvariablen



$$P(X \leq \lambda_\alpha) = \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\lambda_\alpha} f(x) dx = \alpha$$

Beispiel für die Quantilermittlung

Lfd. Nr.	ΔV
1	-19
2	-13
3	-11
4	-8
5	-7
6	-7
7	-5
8	-5
9	-2
10	1
11	1
12	2
13	3
14	5
15	5

Lfd. Nr.	ΔV
16	6
17	6
18	8
19	9
20	10
21	11
22	11
23	13
24	14
25	15
26	17
27	18
28	21
29	23
30	28

Annahme: die dargestellten Wertänderungen sind normalverteilt

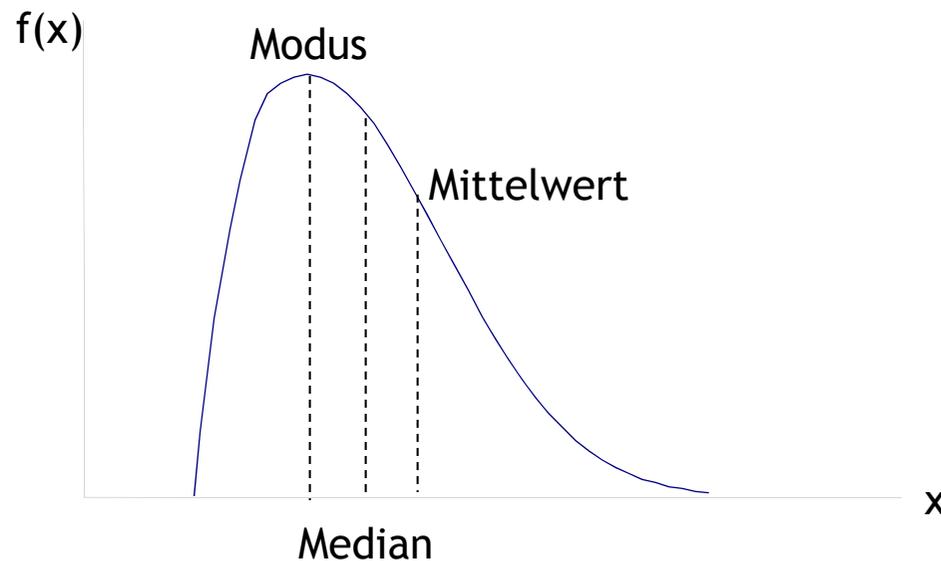
$$\begin{aligned}
 P(\Delta V \leq \lambda_\alpha) &= p \\
 \Leftrightarrow P\left(\frac{\Delta V - \mu}{\sigma} \leq \frac{\lambda_\alpha - \mu}{\sigma}\right) &= p \\
 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\lambda_\alpha - \mu}{\sigma}\right) &= p \\
 \Leftrightarrow \frac{\lambda_\alpha - \mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(p) \\
 \Leftrightarrow \lambda_\alpha &= \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(p)
 \end{aligned}$$

$$\lambda_{0,05} = 5 + 11,2924 \cdot (-1,65) = -13,63$$

$$\mu = \frac{1}{30} \sum_{n=1}^{30} \Delta V_n = 5 \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{29} \left(\sum_{n=1}^{30} \Delta V_n^2 - 30\mu^2 \right)} = 11,2924$$

Schiefe

- ➔ Beispiel für eine rechtsschiefe Verteilung:

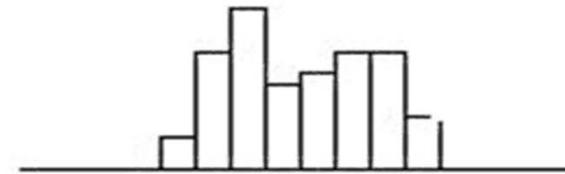


- ➔ Bei symmetrischer Dichte ist die Schiefe gleich Null, z.B. bei der Normalverteilung.
- ➔ Bei einer positiven Schiefe ist die Dichte rechtsschief, sonst linksschief.
- ➔ Je größer der Betrag der Schiefe, umso schiefener ist die Dichte der stetigen Zufallsvariablen X .

Kurtosis



Kurtosis = 4,25
(leptokurtisch)



Kurtosis = 2,23
(platykurtisch)

- Kurtosis: Maß für die Gruppierung von Beobachtungen um einen zentralen Punkt
- Kurtosis > 3: Gruppierung der Beobachtungen dichter als bei der Normalverteilung mit ausgeprägten Seitenrändern
- Kurtosis < 3: Weniger dichte Gruppierung der Beobachtung mit nur geringen Seitenrändern
- Oft (z.B. in Excel) wird nur der Exzess betrachtet, der die Abweichung von der Kurtosis der Normalverteilung beschreibt. Es gilt:
 - Exzess der Normalverteilung = 0
 - Exzess leptokurtischer Verteilungen < 0
 - Exzess platykurtischer Verteilungen > 0

Weiterführende Übungen

- ▶ Kapitel „Finanzmathematische Grundlagen“ von „Bewertung von Finanzinstrumenten“, 5. Auflage (2009)

- ▶ Bewertungs-CD:
 - ▶ Der Lehrstuhl für Finanz- und Bankmanagement hat im Rahmen eines Innovationsprojektes die Thematik der Bewertung von Finanzinstrumenten in eine auf EXCEL basierte Selbstlerneinheit umgesetzt. Darin werden die Grundlagen zur Bewertung der praxisrelevanten Finanzinstrumente erläutert. Mithilfe der Simulationen können die Bewertungsmechanismen nachvollzogen werden und es wird das Verständnis für die Sensitivität der Instrumente gegenüber einzelnen Parametern gefördert. Exemplarisch sollen einige ausgewählte Inhalte aus den vorhandenen 7 Kapitel vorgestellt werden.