Inhaltsübersicht

Inhaltsverzeichnis

1 Financial Engineering

Die Welt der Finanzinstrumente wird stetig vielfältiger. Auch die Geschwindigkeit, mit der sich neue Formen der Geldanlage entwickeln, nimmt rasant zu. Noch zu Beginn des 20. Jahrhunderts dominierte die Anleihe als Anlageform. Diese existiert auch heute noch, sei es mit fixen oder variablen Zinserträgen. Sie bekam jedoch im Verlauf des vorherigen Jahrhunderts Konkurrenz durch die Aktie. Um beide Anlageformen herum entwickelten sich immer neue Finanzinstrumente. So entstanden Swaps, um Zinserträge zu tauschen oder Forward Rate Agreements um zukünftige Zinsen bereits heute zu sichern.

Gegen Ende des vorherigen Jahrhunderts kamen auch asymmetrische Produkte hinzu. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre Gewinn- und Verlustmöglichkeiten nicht gleichverteilt sind. Die bekannteste Form ist die Option. Es gibt mittlerweile Optionen auf die unterschiedlichsten Basisinstrumente. So kann mit Optionen z. B. an der Entwicklung von Aktien, Zinsen oder Währungen partizipiert werden.

Nachdem eine Vielzahl von verschiedenen Produkten am Markt existiert, wurde begonnen, diese auch miteinander zu kombinieren. Ähnlich dem Konstruieren eines Ingenieurs wird dieser Vorgang „Financial Engineering“ genannt.

Es gibt zwei wesentliche Gründe für die rasante Entwicklung des Financial Engineering. Zum einen haben sowohl die Firmenkunden als auch die Privatkunden und institutionellen Anleger einen großen Bedarf an individuellen, massgeschneiderten Lösungen, die ihren finanziellen Bedürfnissen resp. ihren Anlageinteressen entsprechen. Als zweites versuchen sich die Anbieter von Finanzprodukten in einer Welt zunehmender Informationstransparenz durch innovative Produkte von der Konkurrenz abzusetzen.

Dieses Buch soll es dem Leser ermöglichen, sich im Dschungel der Finanzinstrumente zurechtzufinden. Dazu wird beschrieben, wie sich die einzelnen Finanzprodukte bewerten lassen. Begonnen wird mit symmetrischen Basisinstrumenten, wie Straight Bonds oder Floatern aber auch derivativen Produkten wie Forward Rate Agreements und Swaps. Anschließend folgt ein Kapitel zu den asymmetrischen Basisinstrumenten. Die Grundlagen werden am Beispiel von Aktienoptionen erklärt.

In einem ersten Block von strukturierten Finanzprodukten werden Kombinationen aus Anleihen und Aktienoptionen vorgestellt und bewertet. Dazu gehören Aktienanleihen, Discount-Zertifikate und index-basierte Anleihen.

Anschließend werden Zinsoptionen erläutert und bewertet. Hierzu zählen Anleiheoptionen, Caps, Floors und Swaptions. Auch sie werden mit den symmetrischen Basisinstrumenten verknüpft. Dies ergibt Produkte wie Callable Bonds, Putable Bonds, Reverse und Leveraged Floater oder gecapte Constant Maturity Swaps.

Im vorletzten Kapitel werden Wandelanleihen, die aufgrund ihrer Hybridstruktur sowohl Fremd- wie auch Eigenkapitalbestandteile enthalten, analysiert. Neben den Varianten mit ausschließlichem Wandlungsrecht für den Investor werden auch Konstruktionen mit zusätzlichem Kündigungsrecht für den Emittenten näher untersucht.

Ergänzend zu den analytischen Bewertungsmodellen kommen Simulationsverfahren immer dann zum Einsatz, wenn analytische Formeln aufgrund der Komplexität der zu bewertenden Produkte an ihre Grenzen stoßen. Deren Konzeption wird zum Abschluss des Buches behandelt.

Vom didaktischen Konzept verfolgt das Buch zwei Ansätze, die miteinander kombiniert werden. Zuerst werden stets die Basisinstrumente vorgestellt, aus deren Kombination anschliessend exemplarisch neue Finanzinstrumente konstruiert werden. Neben dem Verständnis für die grundlegenden Kombinationstechniken und Bewertungsansätze sollen danach vielfältige Möglichkeiten zur selbständigen Anwendung des Erlernten geboten werden. Hierzu sind eine Reihe von Fallstudien entwickelt worden.

Lösungshinweise zu den Fallstudien finden sich auf www.fin-engineering.de. Dort stehen auch die Excel-Tools zur Monte Carlo Simulation zur Verfügung. Darüber hinaus bietet das Internetportal zum finanziellen Risikomanagement in Unternehmen und Banken www.zinsrisiko.de vielfältige Tools zum Download, auf die im Text hingewiesen wird. Da sich der Markt für Finanzinstrumente im ständigen Umbruch befindet, ist auch eine Diskussionsplattform für neue Entwicklungen eingerichtet worden. Diese bietet auch die Möglichkeit, uns Korrekturhinweise, Fehler und Verbesserungsmöglichkeiten mitzuteilen. Wir freuen uns über jede Mail an info@fin-engineering.de!

2 Finanzmathematische Grundlagen

2.1 Bestimmung der Zinsstrukturkurve

2.1.1 Formen von Zinsstrukturkurven

Im Mittelpunkt dieses Buches steht die Bewertung von Finanzinstrumenten. Allgemein ist unter einem Finanzinstrument ein Vertrag zwischen zwei Marktteilnehmern zu verstehen. Er wird auch als Finanzkontrakt bezeichnet. Der Vertrag legt die Rechte und Pflichten der Vertragspartner fest. Finanzkontrakte können sowohl monetäre als auch nichtmonetäre Bestandteile enthalten. Erstere bestehen vorrangig darin, dass sich Käufer und Verkäufer eines Finanzinstruments verpflichten, Zahlungsströme auszutauschen. Nichtmonetäre Komponenten hingegen können beispielsweise Gestaltungs- und Mitwirkungsrechte umfassen, die dem Inhaber eines Finanzinstruments zustehen. So sichert etwa der Erwerb einer Aktie dem Eigentümer ein Stimmrecht auf der Hauptversammlung des jeweiligen Unternehmens zu. Im Weiteren sei das Augenmerk zunächst ausschließlich auf die monetären Bestandteile eines Finanzkontraktes gelegt.

Der Verkäufer eines Finanzinstruments verpflichtet sich, in der Zukunft einen vertraglich festgelegten Zahlungsstrom bereitzustellen. Dafür erhält er vom Verkäufer den heutigen Gegenwert, den sogenannten Barwert, dieses Zahlungsstromes. Da die Bewertung von Finanzinstrumenten unter der Prämisse vollkommener und vollständiger Kapitalmärkte stattfindet, entspricht der Barwert des Zahlungsstromes seinem Marktpreis. Die Begriffe „Wert“ und „Preis“ können daher in diesem Zusammenhang synonym verwendet werden.

Der Barwert oder Preis eines jeden Finanzinstruments ergibt sich, indem sämtliche in der Zukunft auftretenden Zahlungen auf den Zeitpunkt des Vertragsabschlusses diskontiert werden. Zur Bewertung werden folglich geeignete Diskontierungszinssätze benötigt. Sie erlauben es, Zahlungen entlang der Zeitachse zu verschieben. Zum Beispiel ergibt sich der heutige Preis einer bonitätsrisikolosen festverzinslichen Anleihe durch Abzinsung aller mit dem Wertpapier verbundenen zukünftigen Zins- und Tilgungszahlungen auf den Betrachtungszeitpunkt. Mit dem Diskontierungsvorgang wird dem Zeitwert des Geldes Rechnung getragen: je weiter eine Zahlung in der Zukunft liegt, umso geringer ist ihr heutiger Wert.

Die zur Diskontierung erforderlichen Zinssätze werden allerdings nicht direkt am Geld- und Kapitalmarkt gehandelt. Sie können daher nicht unmittelbar beobachtet werden. Vielmehr ist es erforderlich, sie aus den am Markt gehandelten Wertpapieren zu extrahieren. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich die zur Bewertung erforderlichen Zinssätze aus den Kursen festverzinslicher Anleihen ableiten lassen. Ziel ist es, für jede benötigte Laufzeit den zugehörigen Diskontierungszinssatz zu bestimmen. Das Ergebnis ist eine Zinsstrukturkurve. Anschließend wird verdeutlicht wie die Zinssätze so umgeformt werden können, wie es die in diesem Buch dargestellten Bewertungsmethoden erfordern.

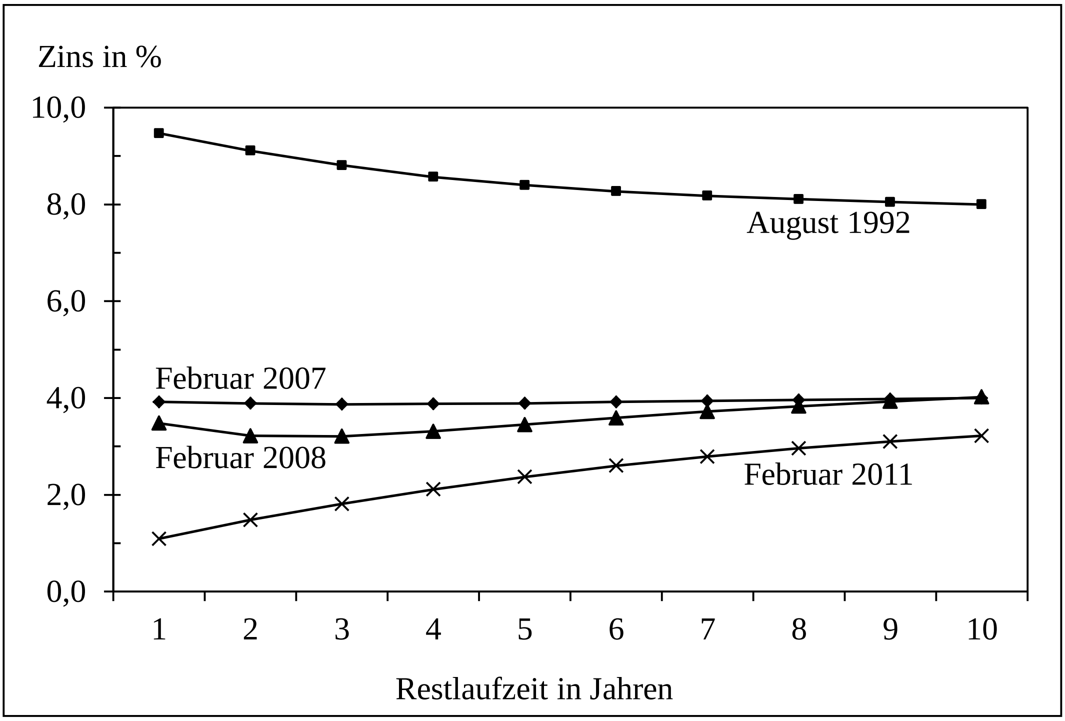

Abb. 1: Formen von Zinsstrukturkurven

Abb. 1 zeigt eine Auswahl historischer Zinsstrukturkurven, die aus Bundeswertpapieren abgeleitet wurden (die Daten finden sich auf der Homepage der Bundesbank unter der Rubrik „Statistik"). Es wird deutlich, dass es sich um einen funktionalen Zusammenhang zwischen Laufzeit und Zinssatz handelt. Die in der Praxis am häufigsten auftretende Form ist die **normale Zinsstrukturkurve**. Sie beschreibt den Fall, dass die Zinssätze mit der Restlaufzeit ansteigen. Dies war z. B. im Februar 2011 der Fall. Betrachtet man beispielhaft die Zinsstrukturkurven von Bundesanleihen auf Basis monatlicher Daten im Zeitraum von Januar 1972 bis Februar 2009, so lässt sich feststellen, dass eine normale Zinsstruktur in etwa 70% aller Monate vorlag.

Im Februar 2007 war der Zinssatz hingegen weitgehend unabhängig von der Restlaufzeit. Dieser Zustand wird als **flache Zinsstrukturkurve** bezeichnet. In der Vergangenheit trat ein solcher Verlauf in etwa einem Viertel der Monate auf.

Die Zinsstrukturkurve vom August 1992, bei der die Zinssätze mit zunehmender Restlaufzeit sinken, wird als **inverse Zinsstrukturkurve** bezeichnet. Sie war in der Vergangenheit besonders selten zu beobachten. In weniger als 10% aller Fälle wies die Zinsstrukturkurve der Bundeswertpapiere einen fallenden Verlauf auf.

Darüber hinaus bilden sich in der Praxis Mischformen, bei denen absolute oder lokale Extrempunkte zwischen der kürzesten und der längsten herangezogenen Restlaufzeit liegen. Zum Beispiel herrschte im Februar 2008 eine sogenannte **bucklige Zinsstrukturkurve**. Ihr absolutes Minimum tritt im Bereich von zwei bis drei Jahren auf.

Die Entstehung der Kurven wird in den ökonomischen Theorien der Zinsstrukturkurve diskutiert. Dazu zählen die Erwartungstheorie (vgl. FISHER 1896), die Liquiditätspräferenztheorie (vgl. HICKS 1946), die Marktsegmentierungstheorie (vgl. CULBERTSON 1957) sowie die Preferred Habitat-Theorie (vgl. MODIGLIANI/SUTCH 1966). Keine der aufgeführten Theorien vermag es jedoch, sämtliche Formen der Kurve zufriedenstellend zu erklären. Da die Vorstellung der Theorien für das weitere Verständnis nicht notwendig ist, sei an dieser Stelle auf die zugehörige Literatur verwiesen.

2.1.2 Ableitung der Zinsstrukturkurve aus Nullkuponanleihen

Bisher wurde davon gesprochen, dass die Zinsstrukturkurve den funktionalen Zusammenhang zwischen der Restlaufzeit einer Zahlung und der Höhe des zugehörigen Zinssatzes zum Ausdruck bringt, mit dessen Hilfe diese Zahlung auf den aktuellen Zeitpunkt diskontiert werden kann. Diese Aussage bedarf einer Präzisierung. Streng genommen ordnet die Zinsstrukturkurve einer gegebenen Laufzeit keinen beliebigen Zinssatz zu, sondern einen Nullkuponzinssatz. Nullkuponzinssätze werden mit z(0,LZ) abgekürzt, wobei die Variable LZ für die jeweilige Laufzeit steht. Bei einem Nullkuponzinssatz werden keine zwischenzeitlichen Zinsen gezahlt. Somit berücksichtigt dieser nur zwei Zahlungszeitpunkte: den Beginn und das Ende des jeweiligen Geschäfts.

Da die zur Darstellung der Zinsstrukturkurve benötigten Nullkuponzinssätze – wie bereits erwähnt – selbst nicht am Markt gehandelt werden, kann die Zinsstrukturkurve nicht unmittelbar am Markt abgelesen werden. Stattdessen muss auf die Preise der am Markt gehandelten Nullkuponanleihen zurückgegriffen werden. Aus ihnen lässt sich die Zinsstrukturkurve ableiten, indem man sich den funktionalen Zusammenhang, der zwischen den Marktpreisen und der Zinsstrukturkurve besteht, zunutze macht.

	Nominal-volumen	Nullkupon	Restlaufzeit	Kurs
Nullkuponanleihe I	1.000.000	5,00%	1 Jahr	101,9417%
Nullkuponanleihe II	1.000.000	5,00%	2 Jahre	101,8931%
Nullkuponanleihe III	1.000.000	5,00%	3 Jahre	99,8002%

Abb. 2: Daten dreier Nullkuponanleihen

Dieses Vorgehen soll an einem Beispiel illustriert werden. Betrachtet werden die Nullkuponanleihen I, II und III, deren Charakteristika in Abb. 2 aufgeführt sind. Anleihen lassen sich anhand ihrer Ausstattungsmerkmale, die in den Emissionsbedingungen festgelegt sind, beschreiben. Die Emissionsbedingungen können im sogenannten Emissionsprospekt nachgelesen werden. Dieser fasst sämtliche Merkmale eines Wertpapiers schriftlich zusammen. Er kann daher mit dem im vorhergehenden Abschnitt erwähnten Finanzkontrakt gleichgestellt werden. Aus dem Emissionsprospekt lassen sich die zukünftigen Zahlungen, die ein Investor beim Kauf erhält, ermitteln. Zu den wesentlichen Ausstattungsmerkmalen einer Nullkuponanleihe zählen das Nominalvolumen, die Laufzeit, die Tilgungsstruktur, die Zinszahlungszeitpunkte und die Höhe des Zinssatzes.

Alle drei Beispielanleihen weisen ein Nominalvolumen von 1.000.000 EUR auf. Da es sich um Nullkuponanleihen handelt, werden sie endfällig in einem Betrag am Ende der Laufzeit zurückgezahlt. Darüber hinaus erfolgt ebenfalls zu diesem Zeitpunkt die gesamte Zinszahlung von 5% pro Jahr einschließlich Zinseszinsen.

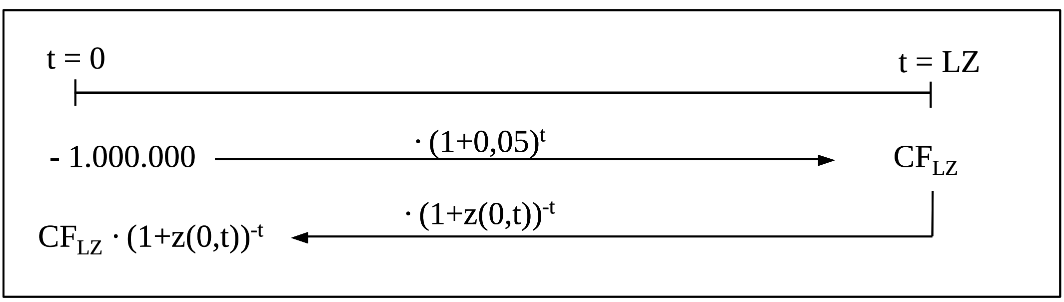

Abb. 3: Zahlungsstrom und Kurs einer Nullkuponanleihe

Der Zahlungsstrom von Nullkuponanleihen ist in Abb. 3 dargestellt, wobei CF_{LZ} dem Cash Flow am Ende der Laufzeit entspricht. Setzt man den heutigen Wert dieser Zahlung mit dem Nominalvolumen ins Verhältnis, erhält man den **Kurs** der Anleihe:

$$\frac{CF_{LZ} \cdot \left(1+z\left(0,LZ\right)\right)^{-t}}{NV} \cdot 100 = \text{Kurs in } \% \tag{2.1}$$

Der Kurs einer Anleihe gibt den aktuellen Marktpreis der Anleihe wieder. Er stellt sich durch fortlaufenden Handel an der Börse ein und ist über Informationsdienste wie Reuters oder Bloomberg jederzeit abrufbar. Die Beispielanleihe I besitzt einen Kurs von 101,9417%. Ihr Marktpreis macht also zum heutigen Zeitpunkt das 1,019417fache des Nominalwertes aus. Sie kann daher für

$$101{,}9417\ \% \cdot 1.000.000\ \text{EUR} = 1.019.417\ \text{EUR}$$

am Markt erworben werden. Dieser Zusammenhang wird genutzt, um Gleichung (2.1) zur Bestimmungsgleichung des Preises einer Anleihe umzuwandeln:

$$\frac{CF_{LZ}}{\left(1+z\left(0,LZ\right)\right)^{LZ}} = \text{Preis in EUR} \tag{2.2}$$

Anhand dieser Gleichung können die für die Bestimmung der Zinsstrukturkurve benötigten Nullkuponzinssätze berechnet werden. Dies ist möglich, da alle weiteren Variablen aus dem Emissionsprospekt bekannt oder am Markt beobachtbar sind:

I: $$1.019.417 = \frac{1.000.000 \cdot 1{,}05^{1}}{1+z\left(0,1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(0,1\right) = \frac{1.050.000}{1.019.417} - 1 = 0{,}03 = 3{,}00\%$$

II: $$1.018.931 = \frac{1.000.000 \cdot 1{,}05^{2}}{\left(1+z\left(0,2\right)\right)^{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(0,2\right) = \sqrt{\frac{1.102.500}{1.018.931}} - 1 = 0{,}0402 = 4{,}02\%$$

Da es sich hier um eine quadratische Gleichung handelt, existiert eine zweite Lösung. Diese ist jedoch negativ und kann in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden. Für den 3-jährigen Nullkuponzinssatz ist nachstehende kubische Gleichung zu lösen:

III: $$998.002 = \frac{1.000.000 \cdot 1,05^3}{\left(1 + z(0,3)\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad z(0,3) = \sqrt[3]{\frac{1.157.625}{998.002}} - 1 = 0,0507 = 5,07\%$$

Der einjährige Nullkuponzinssatz beträgt demnach 3,00%, der zweijährige Nullkuponzinssatz 4,02% und der dreijährige Nullkuponzinssatz 5,07%. Mittels dieser Zinssätze lässt sich die Zinsstrukturkurve grafisch darstellen (vgl. Abb. 4).

Laufzeit	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre
Rendite	3,00%	4,02%	5,07%

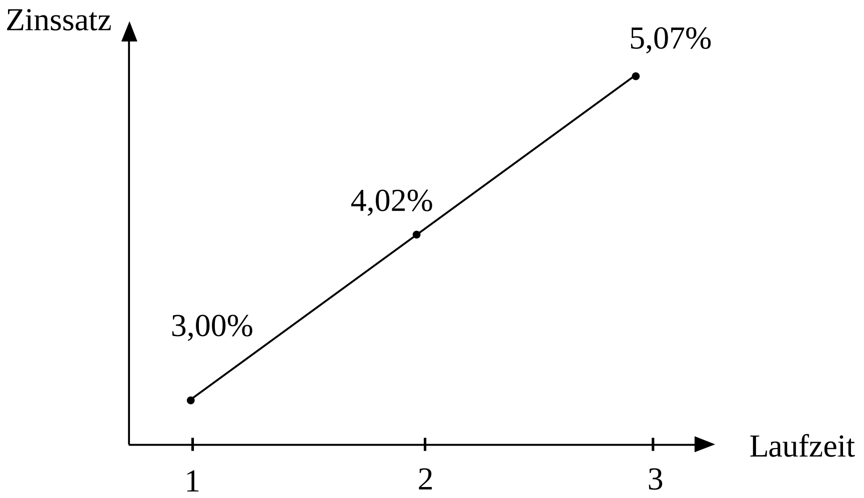

Abb. 4: Zinsstrukturkurve der Nullkuponanleihen I, II und III

Die Zinsstrukturkurve ermöglicht eine faire Bewertung vielzähliger Finanzinstrumente, weshalb die Zinsstrukturkurve eine ausgesprochen große praktische Relevanz besitzt. Die Extrahierung der Nullkuponzinssätze aus Nullkuponanleihen setzt jedoch voraus, dass eine ausreichende Zahl entsprechender Anleihen vorhanden ist. In der Praxis ist dies jedoch nicht der Fall, so dass das vorgestellte Verfahren auf erhebliche Umsetzungsschwierigkeiten stößt.

Anstelle von Nullkuponanleihen stellen Kuponanleihen die auf den Finanzmärkten vorherrschende Variante festverzinslicher Wertpapiere dar. Bei einer Kuponanleihe erfolgt die Zinszahlung nicht kumuliert am Laufzeitende, sondern sie wird in Form periodischer Zahlungen, die meist jährlich erfolgen, geleistet. Die Höhe der Verzinsung gibt der Kupon an. Der Umstand, dass nun mehrere Zahlungen innerhalb der Anleihelaufzeit anfallen, macht die Berechnung der Zinsstrukturkurve komplizierter als bei Verwendung von Nullkuponanleihen als Basiswertpapier. Aus Gründen der Anschaulichkeit wird die nachfolgende Berechnung daher in zwei Schritten durchgeführt. Zunächst wird versucht, die Zinsstrukturkurve auf ähnliche Weise herzuleiten wie in Abschnitt 2.1.2. Dabei zeigt sich aber, dass man bei Verwendung von Kuponanleihen nicht zur gesuchten Zinsstrukturkurve gelangt, sondern zur sogenannten Renditestrukturkurve. Sie eignet sich nicht zur Diskontierung beliebiger Zahlungen. Vielmehr ist sie wertpapierspezifisch, d. h. sie unterscheidet sich von Wertpapier zu Wertpapier. Daher ist in einem zweiten Schritt aufzuzeigen, wie mit Hilfe des Bootstrapping-Verfahrens auch aus kupontragenden Papieren Zinssätze extrahiert werden können, die wertpapierübergreifend Gültigkeit besitzen.

2.1.3 Ableitung der Zinsstrukturkurve aus Kuponanleihen

Genau wie bei Nullkuponanleihen lassen sich auch für festverzinsliche Wertpapiere mit regelmäßigen Zinszahlungen sämtliche Ausstattungsmerkmale aus einem Emissionsprospekt ablesen. Im Unterschied zum Anleihetypus des vorhergehenden Abschnitts ist nun allerdings zu berücksichtigen, dass bereits vor dem Laufzeitende Zahlungen anfallen. Folglich geht in den Preis der Anleihe nicht mehr nur die Zahlung CF_{LZ} ein, sondern jede Zahlung zu den Zeitpunkten t (mit $t \leq LZ$), wobei t die Zinstermine in den Jahren 1 bis LZ repräsentiert. Zur Diskontierung sämtlicher Zahlungen einer Kuponanleihe soll zunächst ein einheitlicher Zinssatz R herangezogen werden. Somit errechnet sich der aktuelle Wert einer Anleihe j aus der Summe aller mit dem Zinssatz R_j diskontierten zukünftigen Zahlungen der Anleihe. Bezeichnet CF_t die Zahlungen, die im Zeitpunkt t erfolgen, gilt:

$$\text{Preis}_j = \sum_{t=1}^{LZ} \frac{CF_t}{(1+R_j)^t} \qquad (2.3)$$

Der Zinssatz R_j stellt die **Rendite** der Anleihe dar und wird als **Yield to Maturity (YTM)** bezeichnet. Das Konzept der YTM unterstellt, dass die Anleihe vom Investor bis zum Ende der Laufzeit gehalten wird und alle aus dieser Anleihe resultierenden zwischenzeitlichen Zahlungen ebenfalls bis zum Ende der Laufzeit mit der gleichen Rendite angelegt werden können. Aus diesem Grund trägt die Rendite R_j den Index der Anleihe und nicht den Zeitindex t, da sie über die gesamte Laufzeit konstant ist.

An dieser Stelle sei ebenfalls auf ein Beispiel zurückgegriffen. Am Markt verfügbar seien die in Abb. 5 vorgestellten Kuponanleihen A, B und C. Sie stimmen bezüglich Nominalvolumen und Restlaufzeit mit den Nullkuponanleihen I, II und III überein, besitzen jedoch andere Kurse.

	Nominalvolumen	Kupon	Restlaufzeit	Kurs
Anleihe A	1.000.000	5,00%	1 Jahr	101,9417%
Anleihe B	1.000.000	5,00%	2 Jahre	101,8955%
Anleihe C	1.000.000	5,00%	3 Jahre	100,0000%

Abb. 5: Ausstattungsmerkmale dreier Kuponanleihen

Zudem ist der Zinssatz von 5,00% nun ein Kuponzinssatz. Somit ergibt sich für Anleihe C nach einem (t = 1), zwei (t = 2) und drei Jahren (t = 3) eine Zinszahlung in Höhe von 50.000 EUR (vgl. Abb. 6). Ergänzt man zusätzlich die Tilgungszahlung, kann der Zahlungsstrom ermittelt werden. Dieser gibt die Leistungen wieder, die ein Investor in der Zukunft als Gegenleistung für den heute zu zahlenden Kaufpreis der Anleihe erhält.

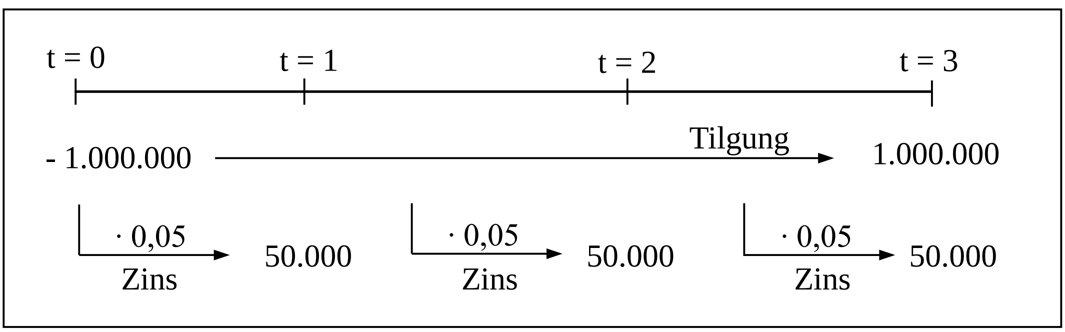

Abb. 6: Zahlungsstrom von Anleihe C

Die Anleihen unterscheiden sich insbesondere durch ihre Laufzeiten. Aus den verfügbaren Informationen sollen nun für die einzelnen Laufzeiten Renditen ermittelt werden. Dies geschieht mit Hilfe von Gleichung (2.3). Die Rendite R_j ist in der Gleichung die einzige unbekannte Variable. Sie ist so zu wählen, dass unter Berücksichtigung der individuellen Ausstattungsmerkmale der Anleihen und der am Markt beobachtbaren Preise die folgenden Gleichungen jeweils erfüllt sind:

$$\text{A:} \qquad 1.019.417 = \frac{1.050.000}{(1+R_A)} \qquad \Rightarrow R_A = 3{,}00\% \qquad (2.4)$$

$$\text{B:} \qquad 1.018.955 = \frac{50.000}{(1+R_B)} + \frac{1.050.000}{(1+R_B)^2} \qquad \Rightarrow R_B \approx 4{,}00\% \qquad (2.5)$$

$$\text{C:} \qquad 1.000.000 = \frac{50.000}{(1+R_C)} + \frac{50.000}{(1+R_C)^2} + \frac{1.050.000}{(1+R_C)^3} \qquad \Rightarrow R_C = 5{,}00\% \qquad (2.6)$$

Die Gleichungen (2.4) und (2.5) sind analytisch lösbar. Für Anleihe A ergibt sich eine Yield to Maturity von 3,00%. Für Anleihe B liegt die YTM bei 4,00%. Gleichung (2.6) kann analytisch nur unter großem Aufwand gelöst werden, da Anleihe C eine Restlaufzeit von mehr als zwei Jahren aufweist. Es empfiehlt sich daher, auf ein Iterationsverfahren zurückzugreifen. Da in diesem speziellen Fall der Kurs bei 100% liegt, entspricht der Kupon der Yield to Maturity. Eine Berechnung ist daher eigentlich nicht erforderlich. Bei Kursen über 100% würde die Yield to Maturity unterhalb des Kupons liegen, bei Kursen unter 100% darüber. Sortiert nach Laufzeiten ergibt sich die in Abb. 7 dargestellte Renditestrukturkurve.

Laufzeit	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre
Rendite	3,00%	4,00%	5,00%

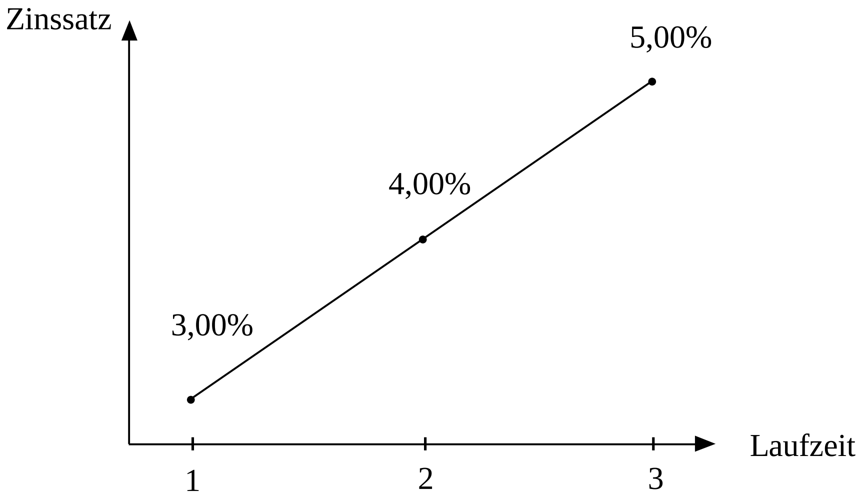

Abb. 7: Renditestrukturkurve der Kuponanleihen A, B und C

Jede Anleihe wird, unabhängig von der Anzahl der anfallenden Zahlungen, mit einer einheitlichen Rendite R_j diskontiert. Zum Beispiel zinst die Yield to Maturity R_A wegen der einjährigen Laufzeit von Anleihe A nur eine Zahlung ab, während R_B bei Anleihe B zwei Zahlungen (nach einem und nach zwei Jahren) diskontiert. Entsprechend gilt R_C für alle Zahlungen der Anleihe C, die innerhalb der Laufzeit von drei Jahren anfallen. Diese Vorgehensweise lässt sich zu folgender Aussage verallgemeinern: Die ermittelten Renditen R_j unterscheiden sich nach Anleihen (d. h. sie sind anleihespezifisch), nicht aber nach Zahlungszeitpunkten (d. h. sie sind periodenunspezifisch). Dies führt dazu, dass Zahlungen unterschiedlicher Anleihen, die zum selben Zeitpunkt erfolgen, mit unterschiedlichen Renditen diskontiert werden. Hinzu kommt, dass bei diesem Verfahren für jede Anleihe eine eigenständige Berechnung durchgeführt werden muss.

Daher sei im Folgenden der umgekehrte Weg eingeschlagen. Für jeden Zahlungszeitpunkt und damit für jede Laufzeit soll ein eigener, periodenspezifischer Zinssatz R' errechnet werden. R'_t gibt damit denjenigen Zinssatz an, mit dem eine Zahlung im Zeitpunkt t zu diskontieren ist. Jede nach einem Jahr anfallende Zahlung wird demnach mit dem gleich bleibenden Zinssatz R'_1 abgezinst, jede nach zwei Jahren anfallende Zahlung mit R'_2, usw. Dies hat den Vorteil, dass die berechneten Renditen nicht mehr anleihespezifisch sind und somit universell für die Bewertung von Anleihen eingesetzt werden können. In Fortsetzung des Beispiels sind die Gleichungen (2.4) bis (2.6) wie folgt umzuformulieren:

$$\text{A:}\qquad 1.019.417 = \frac{1.050.000}{(1+R'_1)} \tag{2.7}$$

$$\text{B:}\qquad 1.018.955 = \frac{50.000}{(1+R'_1)} + \frac{1.050.000}{(1+R'_2)^2} \tag{2.8}$$

$$\text{C:}\qquad 1.000.000 = \frac{50.000}{(1+R'_1)} + \frac{50.000}{(1+R'_2)^2} + \frac{1.050.000}{(1+R'_3)^3} \tag{2.9}$$

Wie lassen sich die R'_t bestimmen? Eine erste Lösungsidee könnte darin bestehen, die bereits ermittelten Renditen R_A, R_B und R_C heranzuziehen und als periodenspezifische Zinssätze zu verwenden. Man setzt $R'_1 = R_A$, $R'_2 = R_B$ und $R'_3 = R_C$. Am Beispiel der 3-jährigen Anleihe C sei geprüft, ob sich die anleihespezifischen Renditen als periodenspezifische Zinssätze eignen:

$$P = \frac{50.000}{(1+0{,}03)^1} + \frac{50.000}{(1+0{,}04)^2} + \frac{1.050.000}{(1+0{,}05)^3} = 1.001.800{,}98$$

Der errechnete Preis von 1.001.800,98 EUR stimmt nicht mit dem beobachteten Marktpreis von 1.000.000,00 EUR überein. Die anleihespezifischen Renditen können daher im Allgemeinen nicht für die Berechnung periodenspezifischer Zinssätze herangezogen werden. Der Grund dafür ist in der Wiederanlageprämisse zu finden. Die Yield to Maturity von 5,00% für drei Jahre unterstellt beispielsweise, dass die zwischenzeitlichen Zahlungen nach einem und zwei Jahren ebenfalls zu 5,00% angelegt werden können. Dies wird in der obigen Rechnung aber missachtet, da nun die ein- und zweijährige YTM in Höhe von 3,00% respektive 4,00% verwendet werden.

Es existiert lediglich ein Spezialfall, in dem die anleihespezifischen Zinssätze gleichzeitig auch den periodenspezifischen Zinssätzen entsprechen. Nur wenn alle Renditen gleich hoch sind, d. h. wenn $R_A = R_B = R_C$ gilt, dürfen anleihespezifische Renditen als periodenspezifische Zinssätze interpretiert werden. Allein in dieser Situation einer flachen Renditestrukturkurve wird die Wiederanlageprämisse nicht verletzt. Bei allen anderen Strukturkurven führt die Verwendung von anleihespezifischen Zinssätzen zu Verzerrungen. So wird bei normalen Renditestrukturkurven die tatsächliche Rendite unterschätzt, während sie bei einer inversen Renditestrukturkurve überschätzt wird.

Dieses Problem wird durch die Verwendung der in Kapitel 2.1.2 eingeführten Nullkuponzinssätze gelöst. Sie führen zum gleichen Kurs wie bei Verwendung der Yield to Maturity und entsprechen den in Gleichung (2.7) bis (2.9) eingeführten Renditen R'_t:

$$P_j = \sum_{t=1}^{LZ} \frac{CF_t}{(1+R_j)^t} = \sum_{t=1}^{LZ} \frac{CF_t}{(1+R'_t)^t} = \sum_{t=1}^{LZ} \frac{CF_t}{(1+z(0,LZ))^t} \qquad (2.10)$$

Da die YTM nicht als Platzhalter für periodenspezifische Zinssätze herangezogen werden kann, muss auf ein anderes Verfahren zurückgegriffen werden, um Nullkuponzinssätze aus Kuponanleihen zu extrahieren. Eine Möglichkeit ist die Anwendung des **Bootstrapping-Verfahrens**. Es wird im Folgenden anhand der drei Beispielanleihen A, B und C dargestellt.

Zu lösen sind die Gleichungen (2.7) bis (2.9). Um die bisher für Nullkuponzinssätze verwendete Schreibweise beizubehalten wird $R'_1 = z(0,1)$, $R'_2 = z(0,2)$ und $R'_3 = z(0,3)$ gesetzt. Für Gleichung (2.7) gilt:

$$1.019.417 = \frac{1.050.000}{(1+z(0,1))} \qquad \Rightarrow z(0,1) = 3,00\ \%$$

Der einjährige Nullkuponzinssatz stimmt mit der einjährigen Yield to Maturity überein, da hier keine zwischenzeitlichen Zahlungen anfallen.

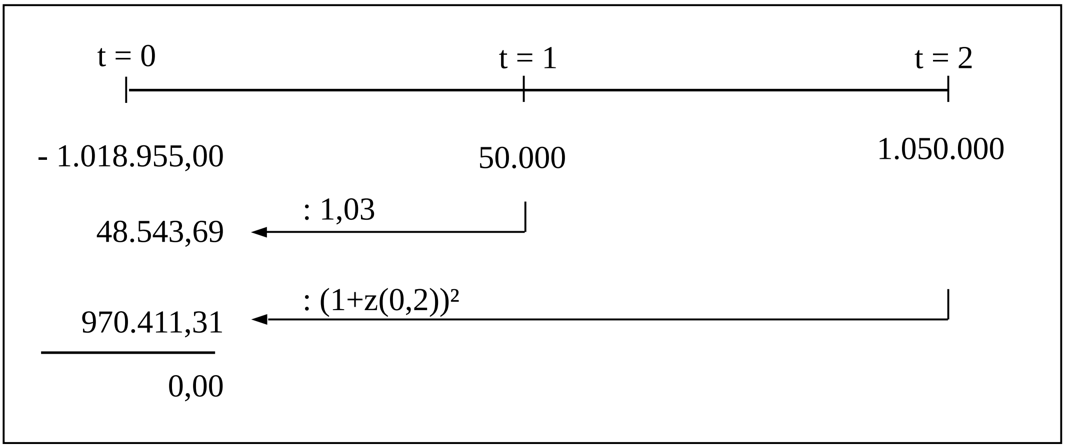

Abb. 8: Bootstrapping der zweijährigen Kuponanleihe B

Ist z(0,1) bekannt, kann auch der zweijährige Zinssatz z(0,2) bestimmt werden. Er beträgt nach folgender Rechnung 4,02%. Abb. 8 stellt das Ergebnis grafisch dar.

$$1.018.955 = \frac{50.000}{(1+z(0,1))} + \frac{1.050.000}{(1+z(0,2))^2}$$

$$\Leftrightarrow 1.018.955 = \frac{50.000}{(1+0,03)} + \frac{1.050.000}{(1+z(0,2))^2}$$

$$\Leftrightarrow 1.018.955 = 48.543,69 + \frac{1.050.000}{(1+z(0,2))^2}$$

$$\Leftrightarrow 970.411,31 = \frac{1.050.000}{(1+z(0,2))^2}$$

$$\Leftrightarrow (1+z(0,2))^2 = \frac{1.050.000}{970.411,31}$$

$$\Leftrightarrow (1+z(0,2))^2 = 1,082015418$$

$$\Leftrightarrow 1+z(0,2) = \sqrt{1,082015418}$$

$$\Leftrightarrow 1+z(0,2) = 1,0402$$

$$\Leftrightarrow z(0,2) = 0,0402 = 4,02\%$$

Die Vorgehensweise macht die Technik des Bootstrapping deutlich. Die Kuponanleihen werden in synthetische Nullkuponanleihen zerlegt.

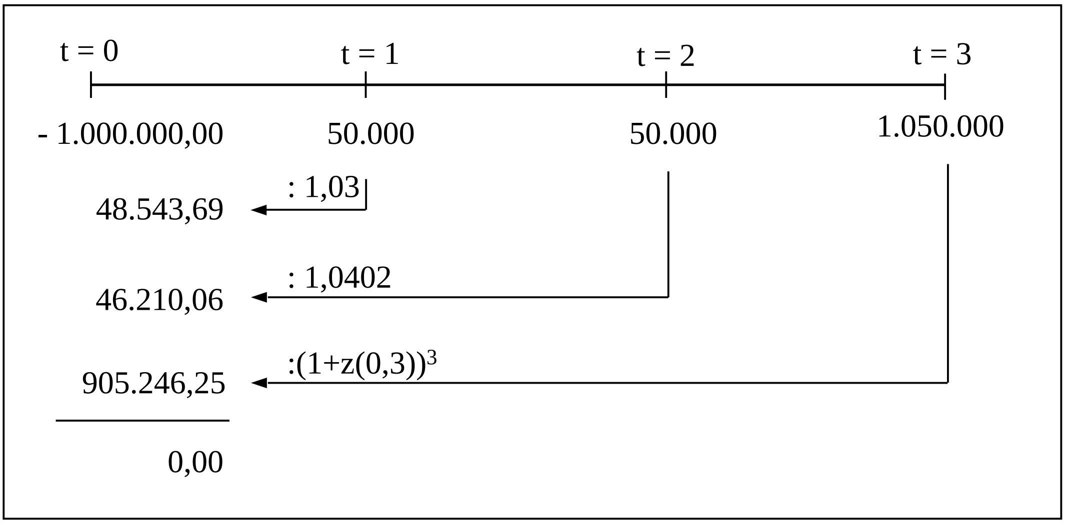

Abb. 9: Bootstrapping der dreijährigen Kuponanleihe C

Mit Kenntnis der Nullkuponzinssätze z(0,1) und z(0,2) kann im letzten Schritt auch der dreijährige Nullkuponzinssatz z(0,3) bestimmt werden:

$$1.000.000 = \frac{50.000}{(1+z(0,1))} + \frac{50.000}{(1+z(0,2))^2} + \frac{1.050.000}{(1+z(0,3))^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1.000.000 = \frac{50.000}{(1+0,03)} + \frac{50.000}{(1+0,0402)^2} + \frac{1.050.000}{(1+z(0,3))^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1.000.000 = 48.543,69 + 46.210,06 + \frac{1.050.000}{(1+z(0,3))^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 905.246,25 = \frac{1.050.000}{(1+z(0,3))^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+z(0,3))^3 = \frac{1.050.000}{905.246,25}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+z(0,3))^3 = 1,159905285$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+z(0,3) = \sqrt[3]{1,159905285}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+z(0,3) = 1,0507$$

$$\Leftrightarrow \qquad z(0,3) = 0,0507 = 5,07\%$$

Grafisch lässt sich das Bootstrapping anhand von Abb. 9 nachvollziehen.

Durch die Bestimmung der Nullkuponzinssätze aus Kuponanleihen mittels des Bootstrapping ist das Ziel, die Zinsstrukturkurve zu bestimmen, erreicht worden. Ohne Rückgriff auf Nullkuponanleihen wurde ein einjähriger Nullkuponzinssatz von 3,00%, ein zweijähriger Nullkuponzinssatz von 4,02% und ein dreijähriger Nullkuponzinssatz von 5,07% berechnet. Die Zinssätze ermöglichen eine direkte Transformation von Zahlungen zu beliebigen zukünftigen, ganzjährigen Zahlungen auf den heutigen Zeitpunkt.

2.2 Transformation von ganzjährigen zukünftigen Zahlungen auf den heutigen Zeitpunkt

2.2.1 Bestimmung von Zerobond-Abzinsfaktoren aus Nullkuponzinssätzen

Mittels der Nullkuponzinssätze können die folgenden zwei Fragen beantwortet werden:

1. Wie viel ist ein Betrag, der in t Jahren gezahlt wird, heute wert?
2. Welcher Betrag muss heute angelegt werden, um in t Jahren eine gewünschte Zahlung zu erhalten?

Die Transformation eines Cash Flows in t Jahren erfolgt nach der Gleichung

$$CF_0 = \frac{CF_t}{(1+z(0,t))^t} \tag{2.11}$$

Zu Beginn sei die Berechnung auf einen Cash Flow von 1 EUR normiert. Es ergeben sich entsprechend Gleichung (2.11) bei unveränderter Zinsstrukturkurve die folgenden heutigen Werte CF_0 für eine Zahlung von 1 EUR in t Jahren:

$$CF_0 = \frac{1}{(1+0,03)^1} = 0,9709 \qquad \text{für 1 EUR in t = 1}$$

$$CF_0 = \frac{1}{(1+0,0402)^2} = 0,9242 \qquad \text{für 1 EUR in t = 2}$$

$$CF_0 = \frac{1}{(1+0,0507)^3} = 0,8621 \qquad \text{für 1 EUR in t = 3}$$

Bei gegebener Zinsstrukturkurve ist 1 EUR, der einem Marktteilnehmer in zwei Jahren zufließt, 92,42 Cent wert. Für 1 EUR in 3 Jahren erhält man heute eine Zahlung von 86,21 Cent. Je weiter der Mittelzufluss in der Zukunft liegt, umso geringer ist sein heutiger Wert. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass man heute 86,21 Cent anlegen muss, um in 3 Jahren eine Zahlung von 1 EUR zu erhalten. Wird eine Zahlung von z. B. 50.000 EUR in 3 Jahren betrachtet, kann diese entweder wie in Gleichung (2.11) abgezinst oder mit dem Faktor 0,8621 multipliziert werden (Hinweis: Die Berechnungen erfolgen mit ungerundeten Werten):

$$CF_0 = \frac{50.000}{(1+0{,}0507)^3} = 43.105{,}61$$

$$CF_0 = 50.000 \cdot 0{,}8621 = 43.105{,}61$$

Der auf eine Zahlung von 1 EUR normierte Multiplikator wird als **Zerobond-Abzinsfaktor** bezeichnet. Die Notierung erfolgt als ZB-AF(t,LZ), wobei t den Startzeitpunkt und LZ die Laufzeit angibt. Aufgrund seiner Normierung auf 1 EUR eignet er sich, um Zahlungen in beliebiger Höhe vom Betrachtungszeitpunkt in die Gegenwart zu transformieren. Für die oben errechneten Zerobond-Abzinsfaktoren gilt folgende Notation: ZB-AF(0,1) = 0,9709, ZB-AF(0,2) = 0,9242 und ZB-AF(0,3) = 0,8621.

In einer Beziehung stimmt der Zerobond-Abzinsfaktor mit dem Nullkuponzinssatz inhaltlich überein: beide transformieren eine Zahlung, bei der keine zwischenzeitlichen Zahlungen anfallen. Folglich können nicht nur die Zerobond-Abzinsfaktoren wie in Gleichung (2.11) gezeigt aus den Nullkuponzinssätzen bestimmt werden, sondern auch umgekehrt die Nullkuponzinssätze aus den Zerobond-Abzinsfaktoren. Allgemein gilt:

$$z(0,LZ) = \text{ZB-AF}(0,LZ)^{-\frac{1}{LZ}} - 1 \tag{2.12}$$

Eine Übertragung auf den 3-jährigen Nullkuponzinssatz führt beispielsweise zu:

$$z(0,3) = 0{,}8621^{-\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}0507 = 5{,}07\%$$

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 10 grafisch dargestellt. Analog lassen sich auf diese Weise auch die Beziehungen zwischen dem einjährigen Zerobond-Abzinsfaktor und dem einjährigen Nullkuponzins und dem zweijährigen Zerobond-Abzinsfaktor und den zweijährigen Nullkuponzinssatz aufzeigen.

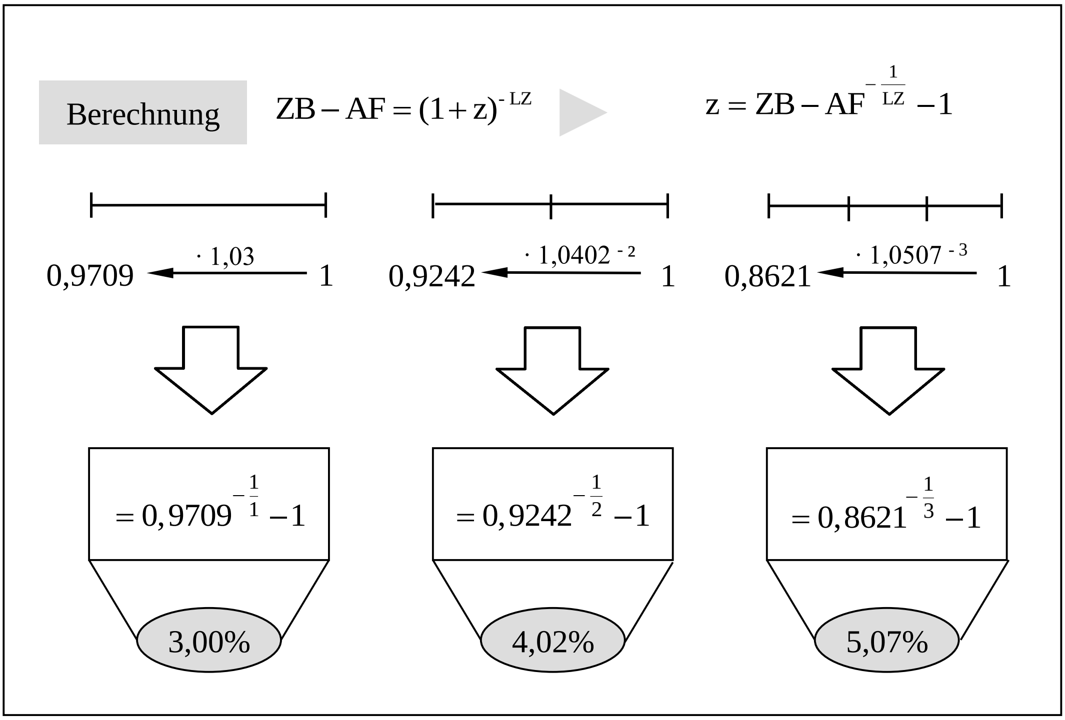

Abb. 10: Zusammenhang von Zerobond-Abzinsfaktoren und Nullkuponzinssätzen

2.2.2 Berechnung der Zerobond-Abzinsfaktoren aus Kuponzinssätzen

Praktisch ist der Versuch, Zerobond-Abzinsfaktoren aus Nullkuponzinssätzen durch Inversion der Gleichung (2.12) gemäß

$$\text{ZB-AF}(0,\text{LZ}) = \left(1 + z\left(0,\text{LZ}\right)\right)^{-\text{LZ}} \tag{2.13}$$

zu berechnen, mit einem erheblichen Problem verbunden. Auf den Kapitalmärkten werden keine Nullkuponzinssätze quotiert, sondern ausschließlich Kuponzinssätze. Dies sind Zinssätze, die eine jährliche Zinszahlung unterstellen. Insofern müssen die bisherigen Ausführungen in zwei Punkten revidiert bzw. erweitert werden.

Obwohl der ökonomisch exakte Sprachgebrauch unter dem Begriff der Zinsstrukturkurve den funktionalen Zusammenhang zwischen der Restlaufzeit und der Höhe der jeweiligen Nullkuponzinssätze subsumiert, ist in der Praxis meist der funktionale Zusammenhang zwischen der Restlaufzeit und der Ausprägung der jeweiligen Kuponzinssätze gemeint. Um Verwechslungen zu vermeiden, ist es daher zwingend erforderlich, festzuhalten, welche Art von Zinssätzen der betrachteten Kurve zu Grunde liegen. Wenn aber die von Informationsdienstleistern, Tageszeitungen und anderen Quellen veröffentlichten Zinssätze Kuponzinssätze sind, wie lassen sich daraus die Zerobond-Abzinsfaktoren ermitteln?

Weiterhin ist zu erläutern, wie die gemäß der Bootstrapping-Methode berechneten Nullkuponzinssätze in Kuponzinssätze umgerechnet werden können. Denn wenn praktisch ausschließlich Kuponkurve angegeben werden, bedürfen die aus dem Bootstrapping resultierenden z(0,LZ) einer weiteren Umrechnung. Da die bisher vorgestellten Techniken der Finanzmathematik zur Lösung dieses Problems noch nicht ausreichen, wird erst in Abschnitt 2.5.3 erneut darauf eingegangen. Im Vordergrund steht somit zunächst die Frage, wie sich aus Kuponzinssätzen Zerobond-Abzinsfaktoren gewinnen lassen.

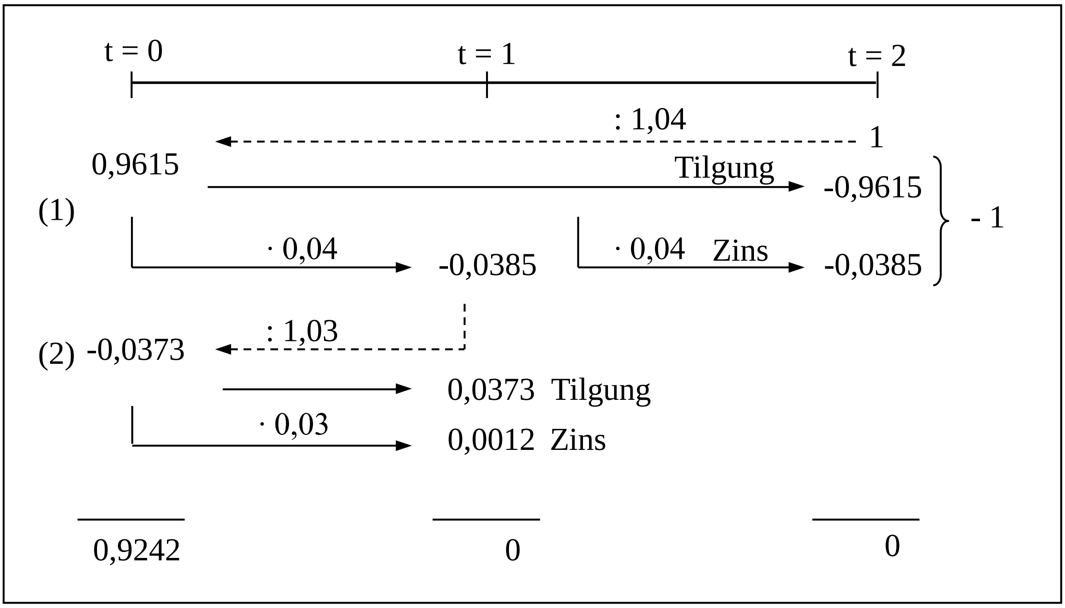

Abb. 11: Berechnung des ZB-AF(0,2)

Da Kupon- und Nullkuponzinssätze bei einer Laufzeit von bis zu einem Jahr identisch sind, sei als Beispiel die Berechnung des ZB-AF(0,2) betrachtet. Der 1-jährige Kuponzinssatz betrage 3,00%, der Kuponzinssatz für 2 Jahre liege bei 4,00%. Ziel ist es, mit Hilfe dieser Angaben eine Zahlung von 1 EUR, die in t = 2 stattfindet, auf den heutigen Zeitpunkt (t = 0) abzuzinsen (vgl. Abb. 11). Zu diesem Zweck sind sämtliche Zahlungen entlang der Zeitachse, die in den Zeitpunkten t = 1 und t = 2 auftreten, durch Gegengeschäfte am Geld- und Kapitalmarkt zu neutralisieren. Dabei ist retrograd vorzugehen, d. h. die Berechnung beginnt mit der zeitlich am weitesten entfernt liegenden Zahlung.

Die Zahlung von 1 EUR in t = 2 kann aufgrund ihres positiven Vorzeichens als Mittelzufluss (Einzahlung) interpretiert werden. Gesucht ist dasjenige Geld- und Kapitalmarktgeschäft, das – in t = 0 getätigt – zu einer Neutralisierung dieses Mittelzuflusses führt. Mit anderen Worten muss heute ein Zahlungsstrom begründet werden, der in zwei Jahren exakt zu einem Mittelabfluss (Auszahlung, negatives Vorzeichen) von 1 EUR führt. Als Nebenbedingung ist dabei die aktuelle Zinsstrukturkurve zu beachten.

Wie sich leicht nachrechnen lässt, führt in t = 0 die Aufnahme eines endfälligen Kredits über 1 EUR : 1,04 = 0,9615 EUR zum gewünschten Effekt. Der Kredit ist heute mit einer Einzahlung von 0,9615 EUR verbunden. Dieser Betrag lässt sich als Nominalvolumen interpretieren. Während der Laufzeit von zwei Jahren ist jeweils eine Zinszahlung von -(0,9615 · 0,04) = -0,0385 EUR pro Jahr zu leisten. Das negative Vorzeichen signalisiert einen Mittelabfluss. In t = 2 ist neben der Zinszahlung auch die Tilgung des Nominalvolumens vorzunehmen (ebenfalls ein Mittelabfluss). Zins und Tilgung addieren sich zu -0,9615 – 0,0385 = -1 und neutralisieren die ursprüngliche Zahlung von 1 EUR im zweiten Jahr.

Allgemein lässt sich dieser erste Schritt der Berechnung wie folgt darstellen. Bezeichnet LZ die Laufzeit des zu kalkulierenden Zerobond-Abzinsfaktors ZB-AF(0,LZ) und i(0,LZ) die Höhe des Kuponzinssatzes mit gleicher Laufzeit, entspricht der erforderliche Kreditbetrag in t = 0 dem Kehrwert aus (1 + i(0,LZ)). Die Tatsache, dass mehrere Laufzeitjahre berücksichtigt werden, äußert sich ausschließlich in der Wahl des laufzeitspezifischen Kuponzinssatzes i(0,LZ). Da es sich um Kuponzinssätze handelt, darf der Nenner (1 + i(0,LZ)) im Exponenten die Laufzeit LZ nicht enthalten. Diese Rechenvorschrift besitzt ausschließlich für Nullkuponzinssätze Gültigkeit und lässt sich nicht auf Kuponzinssätze übertragen.

Die Verwendung von Kuponzinssätzen führt darüber hinaus dazu, dass der Kredit nicht nur eine Zinszahlung in t = 2 aufweist, sondern auch in t = 1. Folglich ist in Abb. 11 in diesem Zeitpunkt einen Mittelabfluss in Höhe von -0,0385 EUR dargestellt. Gesucht ist erneut das heutige Geld- und Kapitalmarktgeschäft, mit dem diese Zahlung neutralisiert werden kann.

Um in t = 1 eine Auszahlung über 0,0385 EUR auszugleichen, muss heute ein Geldbetrag von -0,0385 : 1,03 EUR = -0,0374 EUR für ein Jahr angelegt werden. Dieser Vorgang ist anschaulich ebenfalls als Mittelabfluss zu interpretieren, da die für die Anlage erforderlichen Barmittel im Anlageobjekt gebunden werden. Die Verzinsung der Anlage beträgt gemäß Zinsstrukturkurve 3,00%. Nach einem Jahr ergibt sich ein Mittelzufluss von -(-0,0374 · 0,03) = 0,0011 EUR in Form von Zinsen. Hinzu kommt die Rückzahlung des Anlagebetrages über 0,0374 EUR. In der Summe beträgt die Einzahlung 0,0374 + 0,0011 = 0,0385 EUR. Sie gleicht die Zinszahlung für den Kredit in t = 1 über -0,0385 EUR aus. Im Ergebnis verbleibt folgende Zahlungsreihe: t = 0: 0,9615 EUR + (-0,0374), t = 1: 0 EUR, t = 2: 0 EUR. Durch Summierung der Größen in t = 0 gelangt man zum ZB-AF(0,2). Er beträgt 0,9241 EUR. Hieraus lässt sich erneut der 2-jährige Nullkuponzinssatz gemäß Gleichung (2.12) ableiten:

$$z(0,2) = 0{,}9241^{-\frac{1}{2}} - 1 = 4{,}02\%$$

Dies stellt somit eine weitere Möglichkeit dar, Nullkuponzinsen aus der Renditestrukturkurve zu bestimmen. Der ZB-AF(0,3) wird entsprechend Abb. 12 berechnet. Hier erfolgt der Mittelzufluss von 1 EUR in t = 3. Das Ziel ist es, diesen Mittelzufluss durch Geld- und Kapitalmarktgeschäfte derart zu neutralisieren, dass auch in t = 1 und in t = 2 keine Zahlungsströme vorhanden sind. Ausgangspunkt ist erneut die aktuelle Zinsstrukturkurve, die nun um einen dreijährigen Kuponzinssatz in Höhe von 5,00% ergänzt wird.

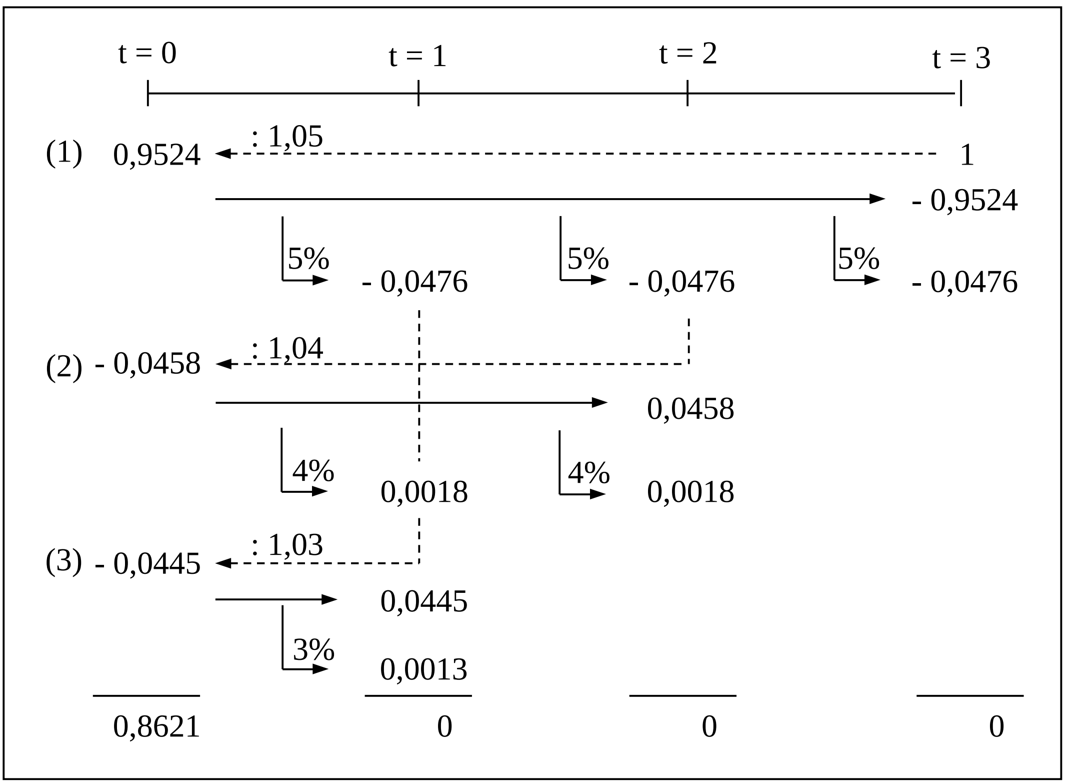

Abb. 12: Berechnung des ZB-AF(0,3)

Die Neutralisierung der Zahlung in t = 3 ist durch die Aufnahme eines endfälligen Kredits möglich. Der laufzeitadäquate Zinssatz beträgt 5,00%. Dieser wird jährlich gezahlt. Das Nominalvolumen in t = 0, das in t = 3 zu einer Rückzahlung (Tilgung und Zinszahlung) von genau 1 EUR führt, beträgt $1{,}05^{-1}$ = 0,9524 EUR. Die aus diesem Finanzgeschäft resultierende Zahlungsverpflichtung beinhaltet im ersten, zweiten und dritten Jahr jeweils eine zu leistende Zinszahlung in Höhe von -(0,9524 · 0,05) = -0,0476 EUR. Im dritten Jahr kommt noch die ebenfalls zu leistende Tilgungszahlung von -0,9524 EUR hinzu, so dass der ursprüngliche Zahlungsstrom von + 1 EUR aufgehoben wird.

Im nächsten Schritt sind die Zinsaufwendungen in t = 1 und t = 2 zu neutralisieren. Da dies rekursiv geschieht, wird mit der laufzeithöheren Zahlung, d. h. dem zweiten Jahr, begonnen. Der Mittelabfluss in Höhe von -0,0476 EUR kann durch eine Geldanlage mit endfälliger Rückzahlung ausgeglichen werden. Dieses Finanzinstrument hat eine Laufzeit von 2 Jahren, so dass der relevante Kuponzinssatz 4,00% beträgt. Die Geldanlage führt zu einem Mittelabfluss in Höhe des Nominalvolumens in t = 0, der durch Mittelzuflüsse in t = 1 und t = 2 in Form von Zinszahlungen entlohnt wird. Am Laufzeitende wird zudem das Nominalvolumen zurückgezahlt. Die Summe aus Tilgung und Zinszahlung entspricht bei einem zweijährigen Kuponzinssatz von 4,00% dem 1,04fachen des ursprünglich angelegten Betrags. Um den aus dem dreijährigen Geschäft entstandenen Mittelabfluss von -0,0476 EUR auszugleichen, muss demnach in t = 0 ein Betrag in Höhe von -0,0476 : 1,04 = -0,0458 EUR angelegt werden. Durch dieses Finanzgeschäft beträgt nun auch der summierte Zahlungsstrom im zweiten Jahr 0 EUR.

Im letzten Schritt wird der Zahlungsstrom in t = 1 betrachtet. Aus der Aufnahme des dreijährigen Kredits liegt eine Zinszahlungsverpflichtung in Höhe von -0,0476 EUR vor. In der Zwischenzeit wurde aber zusätzlich eine Geldanlage mit einer Laufzeit von 2 Jahren abgeschlossen. Diese Anlage führt zu einem jährlichen Zinsertrag in Höhe von 0,0458 · 0,04 = 0,0018 EUR. Folglich beträgt der auszugleichende Zinsbetrag nur noch -0,0476 + 0,0018 = -0,0458 EUR. Gesucht ist also ein Finanzgeschäft, welches nach einem Jahr einen Mittelzufluss in Höhe von eben diesem Betrag erzeugt. Dies kann erneut durch eine Geldanlage generiert werden. Der Rückzahlungsbetrag besteht aus Tilgung und Zinszahlung. Da der einjährige Kuponzinssatz 3,00% beträgt, muss in t = 0 eine Anlage in Höhe von -0,0458 : 1,03 = -0,0445 EUR getätigt werden. Im Ergebnis lautet der Zahlungsstrom in t = 1:

Zinsaufwand Kredit, 3 Jahre Laufzeit:	– 0,0476 EUR
Zinsertrag Geldanlage, 2 Jahre Laufzeit:	+ 0,0018 EUR

Zinsertrag Geldanlage, 1 Jahr Laufzeit:	+ 0,0013 EUR
Rückzahlung Geldanlage, 1 Jahr Laufzeit:	+ 0,0445 EUR
Summe:	0 EUR

Das Ziel, durch Geld- und Kapitalmarktgeschäfte sämtliche Zahlungsströme zu neutralisieren, ist demnach erreicht. Für die Bestimmung des ZB-AF(0,3) müssen nun lediglich die Mittelzu- und -abflüsse in t = 0 summiert werden:

$$\text{ZB-AF}(0,3) = 0,9524 - 0,0458 - 0,0445 = 0,8621$$

Der Zerobond-Abzinsfaktor erlaubt nun die Berechnung des laufzeitgleichen Nullkuponzinssatzes z(0,3):

$$z(0,3) = 0,8621^{-\frac{1}{3}} - 1 = 5,07\%\,.$$

Mit den dargestellten Techniken ist es möglich, beliebige Zahlungen von ganzjährigen, zukünftigen Zeitpunkten auf heute zu transformieren. Oftmals fallen jedoch auch unterjährige Zahlungen an. Wie diese zu handhaben sind, wird im folgenden Kapitel erläutert.

2.3 Unterjährige Zinszahlungen und Laufzeiten

2.3.1 Messung von Unterjährigkeit über Tageszählweisen

Jede Laufzeit, die kürzer als ein Jahr ist, wird als unterjährig bezeichnet. Da Zinssätze auf Jahresbasis (per annum, p. a.) angegeben werden, müssen sie bei abweichenden Laufzeiten auf die entsprechenden Jahresbruchteile umgerechnet werden. Zur Bestimmung der Jahresbruchteile gibt es verschiedene Methoden, die sogenannten **Tageszählweisen** oder auch **Day-Count Conventions.** Diese werden grundsätzlich im Format

$$\frac{\text{Anzahl der Tage im Betrachtungszeitraum (LZ)}}{\text{Anzahl der Tage im Gesamtzeitraum (Basis)}} \tag{2.14}$$

angegeben, unterscheiden sich jedoch in der Bestimmung der Anzahl der Tage.

Sowohl im Zähler als auch im Nenner gibt es zum einen die Möglichkeit, die Monate auf 30 Tage und das Jahr entsprechend auf 360 Tage zu standardisieren. Alternativ können die Anzahl der Tage und das Jahr auch exakt bestimmt werden, um z. B. den Februar oder ein Schaltjahr zu berücksichtigen. Will man beispielsweise den Zins für ein halbes Jahr, das gleichzeitig ein Schaltjahr ist (01.01. bis 30.06.) ermitteln, ergeben sich folgende Möglichkeiten: $^{180}/_{360}$, $^{180}/_{365}$, $^{182}/_{360}$, $^{182}/_{365}$ als auch $^{182}/_{366}$ Jahre.

Die Varianten werden wie folgt bezeichnet:

- $^{180}/_{360}$ entspricht der Zählweise **30/360**. Jeder Monat wird auf 30 Tage standardisiert, das Jahr hat entsprechend immer 360 Tage.
- $^{180}/_{365}$ wird als **30/365** bezeichnet. Jeder Monat wird zwar auf 30 Tage standardisiert, das Jahr hat jedoch 365 Tage.
- $^{182}/_{360}$ entspricht der Zählweise **act/360**. Die Abkürzung „act“ steht für „actual“ und bedeutet „tatsächlich“. Die Tage werden demnach exakt gezählt, während das Jahr auf 360 Tage festgelegt wird.
- $^{182}/_{365}$ wird als **act/365** bezeichnet. Wie bei act/360 wird die tatsächliche Anzahl von Tagen bestimmt, das Jahr ist hingegen auf 365 Tage standardisiert.
- $^{182}/_{366}$ entspricht der Zählung **act/act**. Hier werden sowohl die Tage als auch das Jahr taggenau bestimmt.

Diese Tageszählweisen müssen bei zinstragenden Produkten stets mit angegeben werden, da sie die Höhe der Verzinsung maßgeblich beeinflussen. Soll zum Beispiel eine Zahlung von 100 EUR für den Zeitraum 01.02.2009 bis 31.03.2009 zu einem Kuponzinssatz von 5,00% p. a. angelegt werden, ergeben sich folgende Zinsbeträge in Abhängigkeit von der zugrunde gelegten Tageszählweise:

$$\text{Tageszählweise } \frac{30}{360}: \qquad 5\text{ EUR} \cdot \frac{60}{360} = 0{,}833\text{ EUR} \tag{2.15}$$

$$\text{Tageszählweise } \frac{30}{365}: \qquad 5\text{ EUR} \cdot \frac{60}{365} = 0{,}822\text{ EUR}$$

$$\text{Tageszählweise } \frac{\text{act}}{360}: \qquad 5\text{ EUR} \cdot \frac{59}{360} = 0{,}819\text{ EUR}$$

$$\text{Tageszählweise } \frac{\text{act}}{365}: \qquad 5\text{ EUR} \cdot \frac{59}{365} = 0{,}808\text{ EUR}$$

$$\text{Tageszählweise } \frac{\text{act}}{\text{act}}: \qquad 5\text{ EUR} \cdot \frac{59}{365} = 0{,}808\text{ EUR}$$

Jede Zählweise kann durch entsprechende Umformungen in eine beliebige andere Zählweise transformiert werden. So kann die Frage beantwortet werden, welcher Zinssatz $i_{(2)}$ bei der Zählweise (2) zu der gleichen Auszahlung wie der Zinssatz $i_{(1)}$ bei der Zählweise (1) führt. Als Beispiel sei die Umrechnung der Zählweise (1) act/360 in die Zählweise (2) act/365 gezeigt. Der Zinssatz $i_{(1)}$ ist mit 5,00% gegeben. Gesucht wird der korrespondierende Zinssatz $i_{(2)}$, bei dem beide Zählkonventionen zum gleichen Zinsertrag führen:

$$i_{(1)} \cdot \frac{act}{360} = i_{(2)} \cdot \frac{act}{365} \tag{2.16}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}05 \cdot \frac{59}{360} = i_{(2)} \cdot \frac{59}{365}$$

$$\Leftrightarrow i_{(2)} = 0{,}05 \cdot \frac{59}{360} \cdot \frac{365}{59}$$

$$\Leftrightarrow i_{(2)} = 0{,}0507 = 5{,}07\%$$

Um zur gleichen Zinszahlung von 0,819 EUR zu gelangen, müsste bei der Zählweise act/365 ein Zinssatz von 5,07% vereinbart werden. Der höhere Zinssatz gleicht die 5 Tage aus, die bei der Konvention act/360 im Nenner weniger gezählt werden. So wird pro Tag der Laufzeit ein identischer Zins gezahlt (gerechnet wurde mit ungerundeten Zinssätzen):

$$i_{(1)} \cdot \frac{act}{360} = 5{,}00 \cdot \frac{59}{360} = 0{,}819$$

$$i_{(2)} \cdot \frac{act}{365} = 5{,}07 \cdot \frac{59}{365} = 0{,}819$$

2.3.2 Zinssätze mit abweichender Anzahl an Zinsverrechnungen

Ein weiteres Problem stellen abweichende Zinsverrechnungstermine dar. Soll zum Beispiel ein Zinssatz $i_{(2)}$, der an m Zeitpunkten im Jahr gezahlt wird, mit einem Zinssatz $i_{(1)}$ verglichen werden, der nur jährlich gezahlt wird, muss ebenfalls eine Umformung stattfinden.

Die Umrechnung von Zinssatz $i_{(1)}$ mit jährlichen Zinszahlungen zum Zinssatz $i_{(2)}$ mit m unterjährigen Zinszahlungen gelingt mithilfe der nachstehenden Formel:

$$i_{(2)} = \left[(1+i_{(1)})^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \cdot m \tag{2.17}$$

Soll beispielsweise ein jährlich gezahlter Zinssatz von 5,00% in einen Zinssatz mit halbjährlicher Zinszahlung umgerechnet werden, ergibt sich:

$$i_{(2)} = \left[(1+0,05)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \cdot 2 = 0,0494 = 4,94\%$$

Ein jährlicher gezahlter Zinssatz von 5,00% ist demnach äquivalent zu einem halbjährlich gezahlten Zinssatz von 4,94%.

Umgekehrt kann auch ein Zins mit unterjährigen Zinszahlungen $i_{(2)}$ in einen Zins mit jährlicher Zinszahlung $i_{(1)}$ umgerechnet werden:

$$i_{(1)} = \left[1 + \frac{i_{(2)}}{m} \right]^m - 1$$

Die dargestellten Methoden zeigen, wie Zinssätze mit jährlicher Zinszahlung in Zinssätze mit mehreren Zinszahlungen pro Jahr umgerechnet werden. Es existieren jedoch auch echte unterjährige Zinssätze, die Zeiträume von unter einem Jahr (zum Beispiel drei Monate) abdecken. Diese sollen im folgenden Abschnitt dargestellt werden.

2.3.3 Unterjährige Zinssätze

Die wichtigsten Referenzzinssätze für unterjährige Laufzeiten sind der EURIBOR und der LIBOR. Diese Zinssätze spiegeln den Zins wider, zu dem erstklassige Banken bereit sind, einer anderen Bank gleicher Bonität für eine kurze Laufzeit Geld zu leihen. Somit stellen sie Angebotszinssätze dar. Sie dienen hauptsächlich als Referenzwert für variable Zinsgeschäfte, werden aber auch bei Geldanlagen und Kreditaufnahmen für Zinsverhandlungen herangezogen.

Der EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) wird berechnet, indem 39 europäische (davon 10 deutsche) und 4 internationale Banken der Nachrichtenagentur Reuters täglich den Zinssatz melden, zu dem sie einer anderen Bank erstklassiger Bonität Geld leihen würden. Aus diesen 43 Zinssätzen werden die 15 höchsten und niedrigsten Schätzer eliminiert, um so einen ausreißerresistenten Mittelwert zu erhalten. Der auf diese Weise bestimmte EURIBOR wird auf drei Nachkommastellen gerundet und täglich um 11 Uhr mitteleuropäischer Zeit auf Reuters veröffentlicht. Es werden Laufzeiten von einer bis drei Wochen sowie für ein bis 12 Monate abgedeckt. Als Zählweise wird act/360 verwendet. Seit dem 01.01.1999 ersetzt der EURIBOR die nationalen Referenzzinssätze, wie den FIBOR (Frankfurt Interbank Offered Rate) in Deutschland.

Der LIBOR (London Interbank Offered Rate) wird von der British Bankers Association berechnet und veröffentlicht. Im Gegensatz zum EURIBOR bezieht er sich nicht nur auf eine Währung, sondern wird für 10 Währungen berechnet. Je Währung geben 8 – 16 Banken ihre Schätzungen ab. Die Laufzeiten stimmen mit denen des EURIBOR überein. Dies gilt bis auf das Pfund Sterling auch für die Zählweise. Nur bei dieser Währung wird die Zählweise act/365 verwendet.

Es existieren jedoch auch Finanzprodukte, deren Laufzeit kürzer als eine Woche ist, z. B. die Tagesanleihe des Bundes. Solche Anleihen werden über den Referenzzins EONIA verzinst. Der European Overnight Index Average ist ein täglich bestimmter Durchschnitt der Zinssätze, zu denen sich diejenigen Banken, die auch die EURIBOR-Schätzungen abgeben, bis zum nächsten Tag Geld geliehen haben. Aus diesem Grund ist der EONIA keine Schätzung, sondern ein Mittelwert tatsächlich gehandelter Zinssätze. Bei der von der Europäischen Zentralbank (EZB) durchgeführten Berechnung werden, analog zum EURIBOR, die 15 höchsten und niedrigsten Zinssätze nicht beachtet. Börsentäglich um 19 Uhr mitteleuropäischer Zeit wird das Ergebnis veröffentlicht. Die Zählweise beträgt act/360.

Sämtliche Referenzzinssätze werden, auch wenn sie sich auf unterjährige Laufzeiten beziehen, per annum angegeben. Aus diesem Grund muss auch hier eine Umrechnung auf unterjährige Laufzeiten erfolgen. Die in Formel (2.15) gezeigte Rechnung kann analog auch auf Zinssätze übertragen werden. Soll beispielsweise eine Zahlung für den Zeitraum 01.02.2009 bis 31.03.2009 mit einem 2-Monats-Euribor von 1,32% p. a. verzinst werden, lautet der entsprechende laufzeitadäquate Zinssatz unter Berücksichtigung der Konvention act/360:

$$1{,}32\,\% \cdot \frac{59}{360} = 0{,}216\%$$

Allgemein formuliert gilt:

$$i_{p.a.} \cdot \frac{LZ}{Basis} = i_{LZ} \qquad \text{für alle } LZ < Basis \qquad (2.18)$$

Zerobond-Abzinsfaktoren können ebenfalls auf unterjährige Laufzeiten herunter skaliert werden. Die allgemeine Vorschrift zur Berechnung lautet:

$$\text{ZB-AF}(0, \text{LZ}) = \frac{1}{1 + i \cdot \frac{\text{LZ}}{\text{Basis}}} \qquad \text{für alle } \text{LZ} < \text{Basis} \tag{2.19}$$

Folglich lautet der ZB-AF(0,6 Monate) bei einem Kuponzinssatz für ein halbes Jahr von 2,00% p. a.:

$$\text{ZB-AF}(0, 6\text{M}) = \frac{1}{1 + 0{,}02 \cdot \frac{6}{12}} = 0{,}9901$$

Ist die Laufzeit größer als die Basisperiode (z. B. 1,5 Jahre), werden weder entsprechende Zinssätze quotiert noch können diese mittels Gleichung (2.18) umgerechnet werden. In diesen Fällen müssen die Zinssätze interpoliert werden.

2.4 Interpolation von Zinssätzen

2.4.1 Lineare Interpolation

Die einfachste Variante der Interpolation ist die **lineare Interpolation**. Dabei werden die beiden bekannten Zinssätze zunächst subtrahiert, danach durch den jeweiligen Anteil an der Laufzeit des gesuchten Zinssatzes dividiert und abschließend zum laufzeitkürzeren Zins addiert. Der laufzeitlängere Zins sei dabei als $i_{(2)}$ und der laufzeitkürzere als $i_{(1)}$ bezeichnet. Liegt beispielsweise der 1-jährige Kuponzinssatz $i_{(1)}$ bei 5,00% und der 2-jährige $i_{(2)}$ bei 6,00%, resultiert aus der linearen Interpolation folgender Kuponzinssatz für 1,5 Jahre:

$$i_{(1+6/12)} = i_{(1)} + \left(i_{(2)} - i_{(1)}\right) \cdot \frac{6}{12} = 5 + (6-5) \cdot \frac{6}{12} = 5{,}5\%$$

bzw. allgemein für halbjährliche Zinssätze:

$$i_{(t+6/12)} = i_{(t)} + \left(i_{(t+1)} - i_{(t)}\right) \cdot \frac{6}{12} \tag{2.20}$$

Den Kuponzinssatz für ein Jahr und beispielsweise 3 Monate erhält man entsprechend aus:

$$i_{(1+3/12)} = i_{(1)} + \left(i_{(2)} - i_{(1)}\right) \cdot \frac{3}{12} \tag{2.21}$$

bzw. allgemein für Kuponzinssätze mit ungeraden Laufzeiten:

$$i_{(t+m/12)} = i_{(t)} + \left(i_{(t+1)} - i_{(t)}\right) \cdot \frac{m}{12}, \tag{2.22}$$

wobei m den jeweiligen Monaten des gebrochenen Jahres entspricht. Mit diesem Verfahren können Zinssätze für gebrochene Laufzeiten über einem Jahr ($t \geq 1$) kalkuliert werden.

2.4.2 Interpolation über kubische Splines

Bei der linearen Interpolation wird unterstellt, dass zwischen zwei angrenzenden Zinssätzen (den sogenannten Stützstellen) eine lineare Beziehung besteht. Somit werden diese durch eine Gerade verbunden, auf der alle zwischenzeitlichen Zinssätze liegen (vgl. Abb. 13).

Dies hat den großen Nachteil, dass an den Stützstellen starke Umbrüche bzw. Knicke entstehen und die Zinsstrukturkurve dadurch einen „gezackten“ Verlauf erhält (vgl. PICHLER 1995). Existieren des Weiteren nur sehr wenige Zinssätze, zwischen denen über einen langen Zeitraum hinweg interpoliert werden muss, führt die lineare Interpolation zu einer sehr ungenauen Anpassung. Die **Interpolation mittels kubischer Splines** versucht, diese Probleme zu vermeiden, indem sie die Zinsstrukturkurve glättet. Das Wort „kubisch“ deutet dabei darauf hin, dass Polynome dritten Grades zum Einsatz kommen. Im Ergebnis treten an den Stützstellen keine „Knicke“ mehr auf.

Das Verfahren, welches unter Anderem in VAN DEVENTER, IMAI und MESLER (2005) dargestellt wird, soll hier anhand eines Beispiels erläutert werden. Als Ausgangspunkt dienen vier Nullkuponzinssätze, zwischen denen interpoliert werden soll:

$$z(0,1) = 3,0\%$$

$$z(0,3) = 5,0\%$$

$$z(0,7) = 7,0\%$$

$$z(0,10) = 9,0\%$$

Laufzeit	1 Jahr	3 Jahre	7 Jahre	10 Jahre
Rendite	3,0%	5,0%	7,0%	9,0%

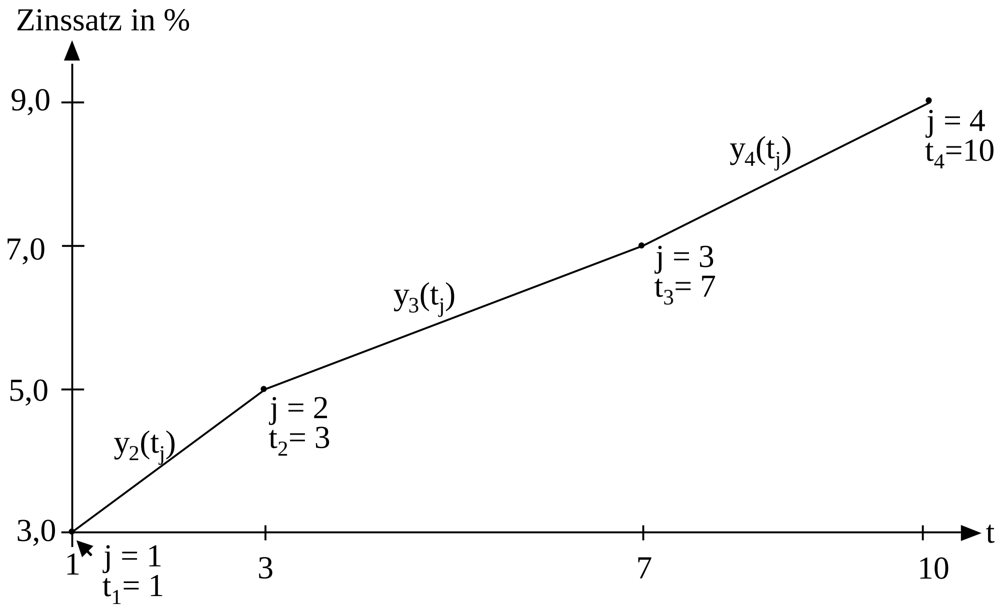

Abb. 13: Linear interpolierte Zinsstrukturkurve

Diese Zinssätze werden mit j = 1, …, 4 durchnummeriert (vgl. Abb. 13). Die Funktionen $y_j(t_j)$ passen das Intervall zwischen t_j und t_{j-1} an (vgl. Abb. 14) und seien wie folgt definiert:

$$y_j(t_j) = c_j + f_j t_j + g_j t_j^2 + h_j t_j^3 \qquad (2.23)$$

Funktion	Untergrenze t_{j-1}	Obergrenze t_j
$y_2(t_j)$	$t_1 = 1$	$t_2 = 3$
$y_3(t_j)$	$t_2 = 3$	$t_3 = 7$
$y_4(t_j)$	$t_3 = 7$	$t_4 = 10$

Abb. 14: Intervallgrenzen

Folglich besteht jede Funktion $y_j(t_j)$ aus den vier unbekannten Variablen c_j, f_j, g_j und h_j. Da im Beispiel 3 Funktionen, dass heißt 12 Variablen zu bestimmen sind, muss ein Gleichungssystem mit 12 Gleichungen aufgestellt und gelöst werden.

Als erster Ansatz bieten sich die bereits bekannten Zinssätze an. Jeder Zinssatz j muss die zwei anliegenden Funktionen $y_j(t_j)$ und $y_{j+1}(t_j)$ erfüllen. Zum Beispiel grenzen an den Zinssatz j = 2 die Funktionen $y_2(t_j)$ und $y_3(t_j)$. Setzt man in diese Funktionen die entsprechende Restlaufzeit t_2 = 3 ein, muss sich zwingend der zweijährige Nullkuponzinssatz von 5,00% ergeben:

$$y_2(3) = 0{,}05 \text{ und } y_3(3) = 0{,}05$$

Zuerst sei die Funktion $y_j(t_j)$ betrachtet. Es muss gelten:

$$y_j(t_j) = c_j + f_j t_j + g_j t_j^2 + h_j t_j^3$$

Folglich ergeben sich die ersten drei Gleichungen des Gleichungssystems:

$$y_2(t_2) = c_2 + f_2 t_2 + g_2 t_2^2 + h_2 t_2^3$$

I $$\Rightarrow\ y_2(3) = c_2 + f_2 \cdot 3 + g_2 \cdot 3^2 + h_2 \cdot 3^3 = 0{,}05$$

$$y_3(t_3) = c_3 + f_3 t_3 + g_3 t_3^2 + h_3 t_3^3$$

II $$\Rightarrow\ y_3(7) = c_3 + f_3 \cdot 7 + g_3 \cdot 7^2 + h_3 \cdot 7^3 = 0{,}07$$

$$y_4(t_4) = c_4 + f_4 t_4 + g_4 t_4^2 + h_4 t_4^3$$

III $$\Rightarrow\ y_4(10) = c_4 + f_4 \cdot 10 + g_4 \cdot 10^2 + h_4 \cdot 10^3 = 0{,}09$$

Die Funktionsgleichungen müssen jedoch nicht nur für $y_j(t_j)$, sondern auch für $y_{j+1}(t_j)$ erfüllt sein. Dies ist äquivalent zu:

$$y_j(t_{j-1}) = c_j + f_j t_{j-1} + g_j t_{j-1}^2 + h_j t_{j-1}^3$$

Eingesetzt lauten die Gleichungen IV – VI wie folgt:

$$y_2(t_1) = c_2 + f_2 t_1 + g_2 t_1^2 + h_2 t_1^3$$

IV $$\Rightarrow\ y_2(1) = c_2 + f_2 \cdot 1 + g_2 \cdot 1^2 + h_2 \cdot 1^3 = 0{,}03$$

$$y_3(t_2) = c_3 + f_3 t_2 + g_3 t_2^2 + h_3 t_2^3$$

V $$\Rightarrow\ y_3(3) = c_3 + f_3 \cdot 3 + g_3 \cdot 3^2 + h_3 \cdot 3^3 = 0{,}05$$

$$y_4(t_3) = c_4 + f_4 t_3 + g_4 t_3^2 + h_4 t_3^3$$

VI $\Rightarrow\ y_4(7) = c_4 + f_4 \cdot 7 + g_4 \cdot 7^2 + h_4 \cdot 7^3 = 0,07$

Das Ziel der kubischen Interpolation ist es, einen glatten Übergang zwischen den Funktionen herzustellen. Dies wird erreicht, indem sowohl die Steigung, d. h. die erste Ableitung, als auch die Krümmung, d. h. die zweite Ableitung der jeweils angrenzenden Funktionen an der Stützstelle j gleichgesetzt wird:

$$y'_j(t_j) = y'_{j+1}(t_j) \qquad \Rightarrow y'_j(t_j) - y'_{j+1}(t_j) = 0 \tag{2.24}$$

$$\Rightarrow f_j + 2 \cdot g_j t_j + 3 \cdot h_j t_j^2 - f_{j+1} - 2 \cdot g_{j+1} t_j - 3 \cdot h_{j+1} t_j^2 = 0$$

$$y''_j(t_j) = y''_{j+1}(t_j) \qquad \Rightarrow y''_j(t_j) - y''_{j+1}(t_j) = 0 \tag{2.25}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot g_j + 6 \cdot h_j t_j - 2 \cdot g_{j+1} - 6 \cdot h_{j+1} t_j = 0$$

Im Beispiel werden so die folgenden Gleichungen erzeugt:

$$y'_2(t_2) - y'_3(t_2) = 0$$

VII $\Rightarrow\ f_2 + 2 \cdot g_2 \cdot 3 + 3 \cdot h_2 \cdot 3^2 - f_3 - 2 \cdot g_3 \cdot 3 - 3 \cdot h_3 \cdot 3^2 = 0$

$$y'_3(t_3) - y'_4(t_3) = 0$$

VIII $\Rightarrow\ f_3 + 2 \cdot g_3 \cdot 7 + 3 \cdot h_3 \cdot 7^2 - f_4 - 2 \cdot g_4 \cdot 7 - 3 \cdot h_4 \cdot 7^2 = 0$

$$y''_2(t_2) - y''_3(t_2) = 0$$

IX $\Rightarrow 2 \cdot g_2 + 6 \cdot h_2 \cdot 3 - 2 \cdot g_3 - 6 \cdot h_3 \cdot 3 = 0$

$$y''_3(t_3) - y''_4(t_3) = 0$$

X $\Rightarrow 2 \cdot g_3 + 6 \cdot h_3 \cdot 7 - 2 \cdot g_4 - 6 \cdot h_4 \cdot 7 = 0$

Zuletzt werden Annahmen über das kurze (t_1 = 1) und das lange (t_4 = 10) Ende der Zinsstrukturkurve getroffen. In beiden Fällen wird vorausgesetzt, dass die Kurve an der entsprechenden Stelle keine Krümmung besitzt. Ihre zweite Ableitung ist somit Null:

$$y''_2(t_1) = 0 \tag{2.26}$$

XI $\Rightarrow 2 \cdot g_2 + 6 \cdot h_2 \cdot 1 = 0$

$$y''_4(t_4) = 0 \tag{2.27}$$

XII $$\Rightarrow 2 \cdot g_4 + 6 \cdot h_4 \cdot 10 = 0$$

Alternativ ist es möglich, die Steigung des langen Endes Null zu setzen. Die dargestellten Gleichungen I – XII erlauben es nun, die Koeffizienten c_j, f_j, g_j und h_j zu bestimmen.

Zu diesem Zweck wird das lineare Gleichungssystem in Matrixform aufgestellt. In der Koeffizientenmatrix **K** werden die Koeffizienten abgetragen, in dem Vektor **V** die Variablen c_j, f_j, g_j und h_j. Die Werte rechts des Gleichheitszeichens stellen den Lösungsvektor **Q** dar. Somit entsteht die Gleichung in Matrixform

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{Q}. \tag{2.28}$$

Mit den Werten aus Gleichungen I bis XII ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 49 & 343 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 49 & 343 \\ 0 & 1 & 6 & 27 & 0 & -1 & -6 & -27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 14 & 147 & 0 & -1 & -14 & -147 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 42 & 0 & 0 & -2 & -42 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 60 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c_2 \\ f_2 \\ g_2 \\ h_2 \\ c_3 \\ f_3 \\ g_3 \\ h_3 \\ c_4 \\ f_4 \\ g_4 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}07 \\ 0{,}09 \\ 0{,}03 \\ 0{,}05 \\ 0{,}07 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Ziel ist es, den Variablenvektor **V** zu bestimmen. Dafür muss die Gleichung (2.28) nach **V** umgeformt werden. Dies gelingt über die Multiplikation der gesamten Gleichung mit der Inversen der Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}^{-1}$, da das Produkt aus Inverse und Matrix ($\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}$) dem Einheitsvektor entspricht. Weil bei der Matrizenrechnung das Kommutativgesetz nicht gilt, d. h. $a \cdot b$ nicht gleich $b \cdot a$ ist, muss der zu multiplizierende Faktor zwingend von links angestellt werden. Die Umformung lautet daher:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{Q} \qquad \Leftrightarrow \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q}$$

Folglich ist zur Bestimmung des Variablenvektors **V** lediglich die Inverse der Koeffizientenmatrix mit dem Lösungsvektor **Q** zu multiplizieren:

$$\Leftrightarrow \ \mathbf{V} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \tag{2.29}$$

Die Inverse kann entweder manuell oder über entsprechende Software berechnet werden. Excel liefert über die Invertierungsfunktion MINV(Matrix) die Matrix:

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}57 & 0{,}04 & -0{,}01 & 1{,}57 & -0{,}04 & 0{,}01 & 0{,}14 & -0{,}04 & 0{,}16 & -0{,}04 & 1{,}20 & 0{,}02 \\ 0{,}52 & -0{,}01 & 0{,}00 & -0{,}52 & 0{,}01 & 0{,}00 & -0{,}05 & 0{,}01 & -0{,}05 & 0{,}01 & -1{,}90 & -0{,}01 \\ 0{,}07 & -0{,}04 & 0{,}01 & -0{,}07 & 0{,}04 & -0{,}01 & -0{,}14 & 0{,}04 & -0{,}16 & 0{,}04 & 0{,}80 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & 0{,}01 & 0{,}00 & 0{,}02 & -0{,}01 & 0{,}00 & 0{,}05 & -0{,}01 & 0{,}05 & -0{,}01 & -0{,}10 & 0{,}01 \\ -2{,}59 & 0{,}82 & -0{,}37 & 2{,}59 & 0{,}18 & 0{,}37 & 5{,}18 & -1{,}11 & -3{,}45 & -1{,}11 & -1{,}73 & 0{,}55 \\ 1{,}54 & -0{,}79 & 0{,}36 & -1{,}54 & 0{,}79 & -0{,}36 & -3{,}09 & 1{,}08 & 2{,}06 & 1{,}08 & 1{,}03 & -0{,}54 \\ -0{,}27 & 0{,}21 & -0{,}11 & 0{,}27 & -0{,}21 & 0{,}11 & 0{,}54 & -0{,}32 & -0{,}36 & -0{,}32 & -0{,}18 & 0{,}16 \\ 0{,}01 & -0{,}01 & 0{,}01 & -0{,}01 & 0{,}01 & -0{,}01 & -0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}01 & -0{,}01 \\ 3{,}99 & -7{,}98 & 5{,}65 & -3{,}99 & 7{,}98 & -4{,}65 & -7{,}98 & 23{,}95 & 5{,}32 & -26{,}6 & 2{,}66 & -27{,}53 \\ -1{,}28 & 2{,}55 & -2{,}22 & 1{,}28 & -2{,}55 & 2{,}22 & 2{,}55 & -7{,}66 & -1{,}70 & 8{,}51 & -0{,}85 & 11{,}50 \\ 0{,}13 & -0{,}26 & 0{,}26 & -0{,}13 & 0{,}26 & -0{,}26 & -0{,}26 & 0{,}79 & 0{,}18 & -0{,}88 & 0{,}09 & -1{,}56 \\ 0{,}00 & 0{,}01 & -0{,}01 & 0{,}00 & -0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}01 & -0{,}03 & -0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}00 & 0{,}07 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V} \quad = \quad \mathbf{K}^{-1} \quad \bullet \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}07 \\ 0{,}09 \\ 0{,}03 \\ 0{,}05 \\ 0{,}07 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}01924 & = & c_2 \\ 0{,}01025 & = & f_2 \\ 0{,}00076 & = & g_2 \\ -0{,}00025 & = & h_2 \\ 0{,}00725 & = & c_3 \\ 0{,}02224 & = & f_3 \\ -0{,}00324 & = & g_3 \\ 0{,}00019 & = & h_3 \\ 0{,}10316 & = & c_4 \\ -0{,}01886 & = & f_4 \\ 0{,}00263 & = & g_4 \\ -0{,}00009 & = & h_4 \end{pmatrix}$$

Anschließend muss die Inverse wie dargestellt mit dem Lösungsvektor **Q** multipliziert werden. Dies ist z. B. über die Funktion MMULT(Matrix1; Matrix2) möglich. Das Ergebnis führt zu den gesuchten Variablen c_j, f_j, g_j und h_j.

Im Ergebnis lauten die Interpolationsfunktionen:

$$y_2(t_j) = 0{,}01924 + 0{,}01025 \cdot t_j + 0{,}00076 \cdot t_j^2 - 0{,}00025 \cdot t_j^3 \qquad 1 \le t_j \le 3$$

$$y_3(t_j) = 0{,}00725 + 0{,}02224 \cdot t_j - 0{,}00324 \cdot t_j^2 + 0{,}00019 \cdot t_j^3 \qquad 3 \le t_j \le 7$$

$$y_4(t_j) = 0{,}10316 - 0{,}01886 \cdot t_j + 0{,}00263 \cdot t_j^2 - 0{,}00009 \cdot t_j^3 \qquad 7 \le t_j \le 10$$

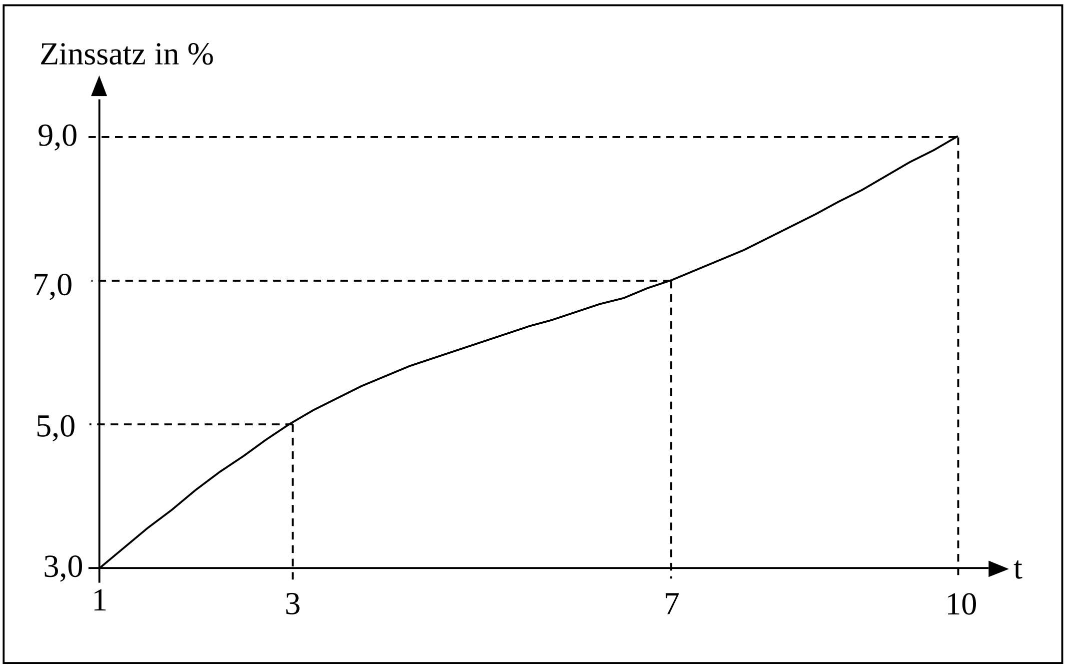

Abb. 15: Interpolation mittels kubischer Splines

Diese Funktionen erlauben es nun, sowohl die interpolierte Zinsstrukturkurve zu zeichnen (vgl. Abb. 15) als auch Zinssätze für jede beliebige Restlaufzeit zu berechnen:

t = 2,75: $y_2(2{,}75) = 0{,}01924 + 0{,}01025 \cdot 2{,}75 + 0{,}00076 \cdot 2{,}75^2 - 0{,}00025 \cdot 2{,}75^3$

$= 4{,}79\%$

t = 3,71: $y_3(3{,}71) = 0{,}00725 + 0{,}02224 \cdot 3{,}71 - 0{,}00324 \cdot 3{,}71^2 + 0{,}00019 \cdot 3{,}71^3$

$= 5{,}50\%$

t = 8,42: $y_4(8{,}42) = 0{,}10316 - 0{,}01886 \cdot 8{,}42 + 0{,}00263 \cdot 8{,}42^2 - 0{,}00009 \cdot 8{,}42^3$

$= 7{,}86\%$

Für eine Laufzeit von 2,75 Jahren ergibt sich ein interpolierter Zinssatz von 4,79%, für eine Laufzeit von 3,71 Jahre von 5,50% und für eine Laufzeit von 8,42 Jahre von 7,86%.

2.4.3 Vergleich von linearer und kubischer Interpolation

Es wird deutlich, dass die kubische Interpolation einen wesentlich höheren Rechenaufwand mit sich bringt. Auch wenn durch die technologische Entwicklung immer größere Rechnerkapazitäten vorliegen, ist dies ein nicht zu vernachlässigender Nachteil. Anhand einer kurzen Studie soll im Folgenden geprüft werden, in wie fern der zusätzliche Aufwand seine Berechtigung findet.

Laufzeit	10 Jahre
Nominalvolumen	1.000.000 EUR
Zinssatz	6,73%
Zinszahlung	halbjährlich
Tilgung	Raten

Abb. 16: Daten der Beispielanleihe

Als Ausgangspunkt dient die in Abb. 16 dargestellte Anleihe. Zur Diskontierung wird die von der Deutschen Bundesbank ermittelte Zinsstrukturkurve herangezogen. Da die Zinszahlung halbjährlich geschieht, muss jeweils zwischen den ganzjährlichen Stützstellen interpoliert werden, um einen Halbjahres-Zinssatz zu generieren. Dies geschieht zum einen mittels kubischer, zum anderen mittels linearer Interpolation. Die Differenz der so berechneten Barwerte zeigt, wie groß der Unterschied zwischen den Interpolationsverfahren ist. Diese Vorgehensweise wird mit sämtlichen monatlichen Zinsstrukturkurven des Zeitraums September 1972 bis Februar 2009 wiederholt. Im Ergebnis können für die Anleihe 442 Barwertdifferenzen erzeugt werden, deren Histogramm in Abb. 17 dargestellt ist.

Im Durchschnitt unterscheiden sich die mittels kubischer und linearer Interpolation bestimmten Barwerte um 6,67 EUR. Auch die Standardabweichung von 27,74 EUR bestätigt, dass in diesem Anwendungsbeispiel der höhere Rechenaufwand der kubischen Interpolation nicht gerechtfertigt ist.

Das Ergebnis dieses Beispiels wurde von mehreren Faktoren beeinflusst, die kritisch zu hinterfragen sind. Zum einen tritt eine Ratentilgung in der Praxis nur selten auf, weitaus häufiger ist eine endfällige Tilgung. Zudem liegen die Stützstellen relativ eng beieinander, so dass die lineare Interpolation ebenfalls eine gute Anpassung ermöglicht. Würden weniger Stützstellen gewählt, müsste die Interpolation über einen größeren Zeitraum hinweg erfolgen, so dass eine kubische Interoplation sinnvoll sein könnte. Da auf dem Markt aber Zinssätze für beliebige Restlaufzeiten vorhanden sind und in der Regel die Abstände zwischen den Stützstellen bei einem Jahr liegen, ist diese Annahme nicht notwendig.

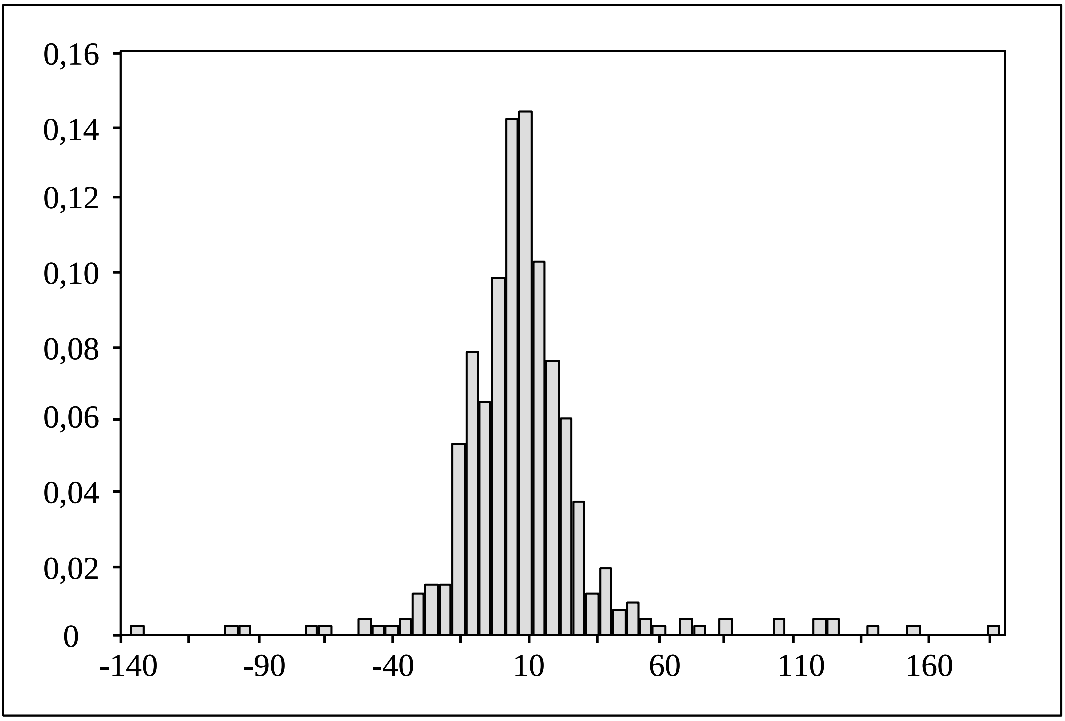

Abb. 17: Histogramm der Barwertdifferenzen bei halbjährlicher Verzinsung

Der Vorteil, dass die kubische Interpolation die Zinsstrukturkurve glättet, ist in der Praxis im Regelfall daher nicht ausschlaggebend. Das Beispiel zeigt, dass die lineare Interpolation ausreicht. Im Folgenden wird daher bei Bedarf immer auf die lineare Interpolation zurückgegriffen.

Die Techniken, wie aus am Markt gehandelten Wertpapieren Zinssätze extrahiert und aus diesen eine Zinsstrukturkurve für den aktuellen Bewertungszeitpunkt abgeleitet werden kann, sind nun bekannt. Zur Bewertung von Finanzinstrumenten reichen diese Verfahren jedoch nicht aus. Aus diesem Grund wird im nächsten

Kapitel dargestellt, wie sich aus den aktuellen Zinssätzen auch zukünftige Zinssätze berechnen lassen.

2.5 Berechnung zukünftiger Zinssätze

2.5.1 Zukünftige Zerobond-Aufzinsfaktoren

Bisher wurden nur Geschäfte betrachtet, die im heutigen Zeitpunkt beginnen. Liegt der Beginn eines Geschäftes und damit der **Bewertungszeitpunkt** jedoch **in der Zukunft**, muss auch der Startzeitpunkt des Zerobond-Abzinsfaktors auf den entsprechenden Bewertungszeitpunkt verschoben werden.

Die bisher bekannten Zerobond-Abzinsfaktoren haben die Notation ZB-AF(0,LZ). Dabei steht die Null in der Klammer für den Bewertungszeitpunkt heute und LZ für die Laufzeit des Zerobond-Abzinsfaktors. Dies soll nun konsequent verallgemeinert werden, indem auch beliebige Bewertungszeitpunkte möglich sind. Mithilfe des ZB-AF(t,LZ) kann eine Zahlung in (t + LZ)-Jahren auf den Zeitpunkt t diskontiert werden. Der Bezugszeitpunkt kann dabei sowohl der heutige Tag sein (t = 0) als auch in der Zukunft liegen (t > 0). Somit stehen mit den Zerobond-Abzinsfaktoren universelle Bewertungsinstrumente zur Verfügung, um zukünftige Zahlungen auf beliebige Zeitpunkte zu diskontieren.

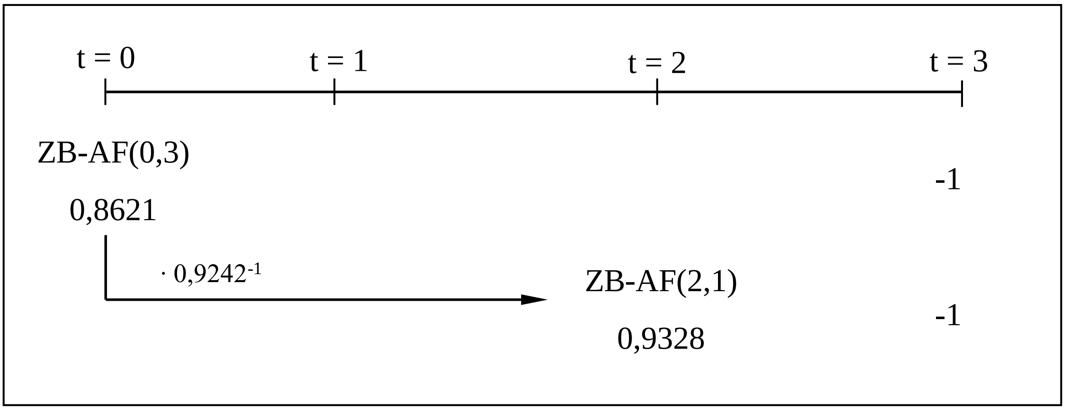

Abb. 18: Konstruktion des ZB-AF(2,1)

Die Vorgehensweise sei am Beispiel der Kalkulation des ZB-AF(2,1) dargestellt. Dieser diskontiert eine Zahlung, die in 3 Jahren (t + LZ = 2 + 1 = 3) fällig wird, auf den Zeitpunkt t = 2 ab. Zuerst wird die Zahlung in t = 3 mithilfe des ZB-AF(0,3) auf den Zeitpunkt t = 0 abgezinst, um sie anschließend auf den gewünschten Zeitpunkt t = 2 aufzuzinsen (vgl. Abb. 18). Für die Berechnung der zukünftigen Zerobond-Abzinsfaktoren nutzt man die bereits bekannten Zerobond-Abzinsfaktoren mit Bewertungszeitpunkt heute.

Auch für das Aufzinsen können die Zerobond-Abzinsfaktoren genutzt werden. Anstatt zu multiplizieren (wie beim Abzinsen) muss dividiert werden, um Zahlungen aufzuzinsen. Der Kehrwert des Zerobond-Abzinsfaktors wird als **Zerobond-Aufzinsfaktor ZB-UF** bezeichnet. Allgemein gilt:

$$\text{ZB-UF}(t, LZ) = \frac{1}{\text{ZB-AF}(t, LZ)} \tag{2.30}$$

Mit Hilfe der ZB-UF ist es möglich, beliebige Geldbeträge vom Betrachtungszeitpunkt heute in die Zukunft zu transformieren (vgl. SCHIERENBECK/WIEDEMANN 1996, S. 21 ff.).

Bezogen auf den gesuchten ZB-AF(2,1) müssen die 0,8621 noch für 2 Jahre aufgezinst werden. Dies geschieht mithilfe des ZB-UF(0,2). Der Faktor $0{,}9242^{-1}$ entspricht dem Kehrwert des ZB-AF(0,2). Dies ergibt einen ZB-UF(0,2) von 1,0820 und führt zum gesuchten ZB-AF(2,1) von 0,9328.

Allgemein können zukünftige Zerobond-Abzinsfaktoren daher wie folgt berechnet werden:

$$\text{ZB-AF}(t, LZ) = \text{ZB-AF}(0, t + LZ) \cdot \text{ZB-UF}(0, t) \tag{2.31}$$

Alternativ kann die Berechnung auch nur unter Einsatz der Zerobond-Abzinsfaktoren mit Bewertungszeitpunkt heute erfolgen:

$$\text{ZB-AF}(t, LZ) = \frac{\text{ZB-AF}(0, t + LZ)}{\text{ZB-AF}(0, t)} \tag{2.32}$$

$$\text{ZB-AF}(2,1) = \frac{\text{ZB-AF}(0,3)}{\text{ZB-AF}(0,2)} = \frac{0{,}8621}{0{,}9242} = 0{,}9328$$

Mithilfe der gezeigten Formeln lassen sich sämtliche **zukünftigen Zerobond-Abzinsfaktoren** aus einer gegebenen Renditestrukturkurve berechnen. Beispielhaft sei dies für eine Renditestruktur mit einem 1-Jahres-Kuponzinssatz von 3,00%, einem 2-Jahres-Kuponzinssatz von 4,00%, einem 3-Jahres-Kuponzinssatz von 5,00%, einem 4-Jahres-Kuponzinssatz von 6,00% und einem 5-Jahres-Kuponzinssatz von 7,00% in Abb. 19 dargestellt. Den Berechnungen liegen ungerundete Werte zugrunde.

Der ZB-AF(3,1) besagt zum Beispiel, welchen Wert eine Zahlung von 1 EUR, die in vier Jahren anfällt, in drei Jahren besitzt. Er berechnet sich als Verhältnis des ZB-AF(0,4) und des ZB-AF(0,3):

$$\text{ZB-AF}(3{,}1) = \frac{\text{ZB-AF}(0{,}4)}{\text{ZB-AF}(0{,}3)} = \frac{0{,}7873}{0{,}8621} = 0{,}9132\,.$$

Laufzeit (LZ) / Beginn (t)	1	2	3	4	5
0	0,9709	0,9242	0,8621	0,7873	0,7027
1	0,9519	0,8880	0,8109	0,7238	
2	0,9329	0,8519	0,7603		
3	0,9132	0,8151			
4	0,8925				

Abb. 19: Zerobond-Abzinsfaktoren ZB-AF(t,LZ)

Mithilfe der bisher gezeigten Formeln können nur ganzjährige Zerobond-Abzinsfaktoren ausgerechnet werden. Sollen **Zerobond-Abzinsfaktoren auch für ungerade Bewertungszeitpunkte und Laufzeiten** bestimmt werden, müssen die zwischenzeitlichen Zinszahlungen berücksichtigt werden. Als Beispiel sei die Berechnung aller halbjährlichen Zerobond-Abzinsfaktoren für einen Zeitraum von zwei Jahren gezeigt.

Gesucht werden daher die ZB-AF(0,18M), ZB-AF(6M,6M), ZB-AF(6M,12M), ZB-AF(6M,18M), ZB-AF(12M,6M), ZB-AF(18M,6M). Bekannt sind der Kuponzins für ein halbes Jahr von 2,00% p. a., der einjährige Kuponzinssatz von 3,00% p. a. und der zweijährige Kuponzinssatz von 4,00% p. a. sowie die daraus resultierenden Zerobond-Abzinsfaktoren ZB-AF(0,6M) = 0,9901, ZB-AF(0,1) = ZB-AF(0,12M) = 0,9709, ZB-AF(0,2) = ZB-AF(0,24M) = 0,9242 und ZB-AF(1,1) = ZB-AF(12M,12M) = 0,9519.

Zuerst wird der Zerobond-Abzinsfaktor für den Bewertungszeitpunkt t = 0 und eine Laufzeit von 1,5 Jahren, d. h. 18 Monaten bestimmt (vgl. Abb. 20). Der Zinssatz für 1,5 Jahre soll, wie in Kapitel 2.4.1 gezeigt, linear interpoliert werden und beträgt somit 3,50% p. a.

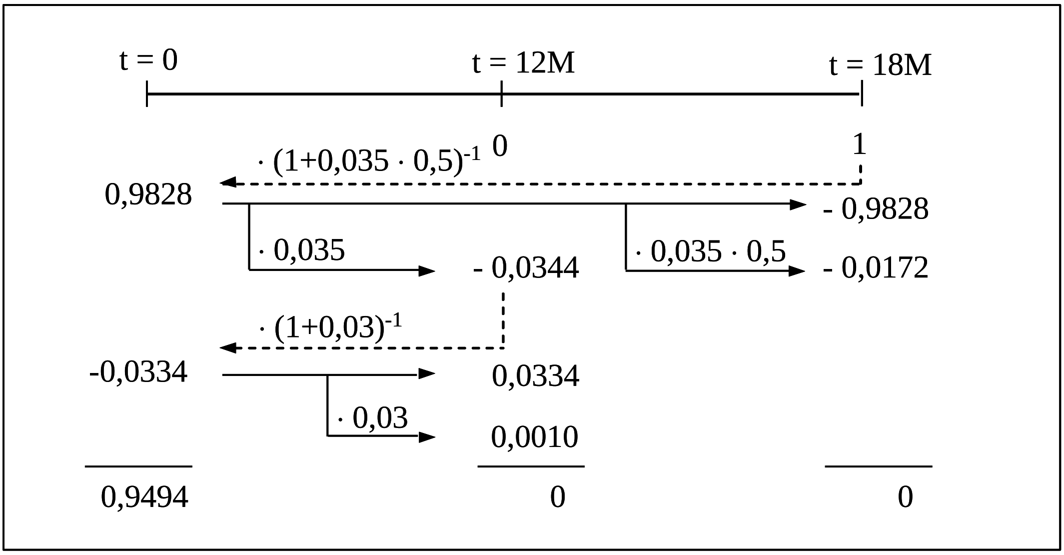

Abb. 20: Kalkulation des ZB-AF(0,18M)

Im ersten Schritt ist, wie gewohnt, lediglich die Zinszahlung am Ende der Laufzeit ausschlaggebend. Diese bezieht sich im Falle des Abzinsfaktors mit einer Laufzeit von 18 Monaten auf ein halbes Jahr, weshalb der Zinssatz von 3,50% mit 0,5 multipliziert wird. Erst im Anschluss gehen die ganzjährigen Zahlungszeitpunkte wie dargestellt mit in die Berechnung ein. Damit errechnet sich ein ZB-AF(0,18M) von 0,9494.

LZ / t	0,5	1	1,5	2
0	0,9901	0,9709	0,9494	0,9242
0,5	0,9806	0,9589	0,9334	
1	0,9779	0,9519		
1,5	0,9734			

Abb. 21: Zerobond-Abzinsfaktoren für ungerade Bewertungszeitpunkte und Laufzeiten

Dieser Zerobond-Abzinsfaktor kann nun genutzt werden, um zum Beispiel mithilfe von Gleichung (2.32) den zukünftigen ZB-AF(6M,12M) zu bestimmen. Dieser errechnet sich wie folgt:

$$\text{ZB-AF}\left(\frac{6}{12},\frac{12}{12}\right)=\frac{\text{ZB-AF}\left(0,\frac{18}{12}\right)}{\text{ZB-AF}\left(0,\frac{6}{12}\right)}=\frac{0{,}9494}{0{,}9901}=0{,}9589$$

Mittels der dargestellten Rechnungen kann nun jede beliebige Kombination aus Bewertungszeitpunkt und Laufzeit hergeleitet werden. Abb. 21 gibt einen Überblick über alle halbjährlichen Zerobond-Aufzinsfaktoren mit einer Laufzeit bis zu 2 Jahren. Die Tabelle wurde anhand ungerundeter Werte berechnet.

2.5.2 Zukünftige Nullkuponzinssätze

Die Kalkulation zukünftiger Nullkuponzinssätze verläuft sehr ähnlich. Auch hier werden zur Berechnung eines Nullkuponzinssatzes, der im Zeitpunkt t startet und LZ Jahre läuft, die bekannten Nullkuponzinssätze z(0,t+LZ) und z(0,t) mit Bezugszeitpunkt heute herangezogen. Es müssen im Vergleich zu den Zerobond-Abzinsfaktoren jedoch einige zusätzliche Transformationen durchgeführt werden. Insbesondere ist zu beachten, dass für die Berechnung die richtige Formel eingesetzt wird. Ein Prüfschema zur Auswahl der passenden Formel liefert Abb. 22.

Insgesamt sind vier Fälle zu unterscheiden. Die erste Unterscheidung betrifft den Startzeitpunkt. Wenn der Startzeitpunkt in einem Jahr oder weiter in der Zukunft ($t \geq 1$ Jahr) liegt, kommt Formel (2.33) zum Einsatz (Fall 1). Die Laufzeit des zukünftigen Nullkuponzinssatzes spielt keine Rolle. Die Formel kann sowohl für unter- als auch überjährige Laufzeiten eingesetzt werden. Für den Spezialfall ganzjähriger Startzeitpunkte und ganzjähriger Laufzeiten kann die vereinfachte Gleichung (2.34) genutzt werden.

Liegt der Startzeitpunkt dagegen im unterjährigen Bereich ($t < 1$ Jahr) ist die Laufzeit des Nullkuponzinssatzes für die Auswahl der richtigen Formel bedeutsam. Wenn die Laufzeit des Zinssatzes ein Jahr übersteigt ($LZ \geq 1$ Jahr), muss Formel (2.35) eingesetzt werden (Fall 2).

Ist die Laufzeit dagegen kleiner als ein Jahr ($LZ < 1$ Jahr), ist noch eine weitere Fallunterscheidung notwendig. Zu prüfen ist, ob die Summe aus Startzeitpunkt und Laufzeit ein Jahr übersteigt (Fall 3) oder nicht (Fall 4). Ist dies der Fall ($t + LZ \geq 1$ Jahr), ist der Zusammenhang (2.37) zu verwenden. Übersteigt die Summe aus Startzeitpunkt und Laufzeit ein Jahr dagegen nicht ($t + LZ < 1$ Jahr), dann kommt Gleichung (2.38) zum Einsatz. Die Formeln und ihre Anwendungen sind im Folgenden dargestellt.

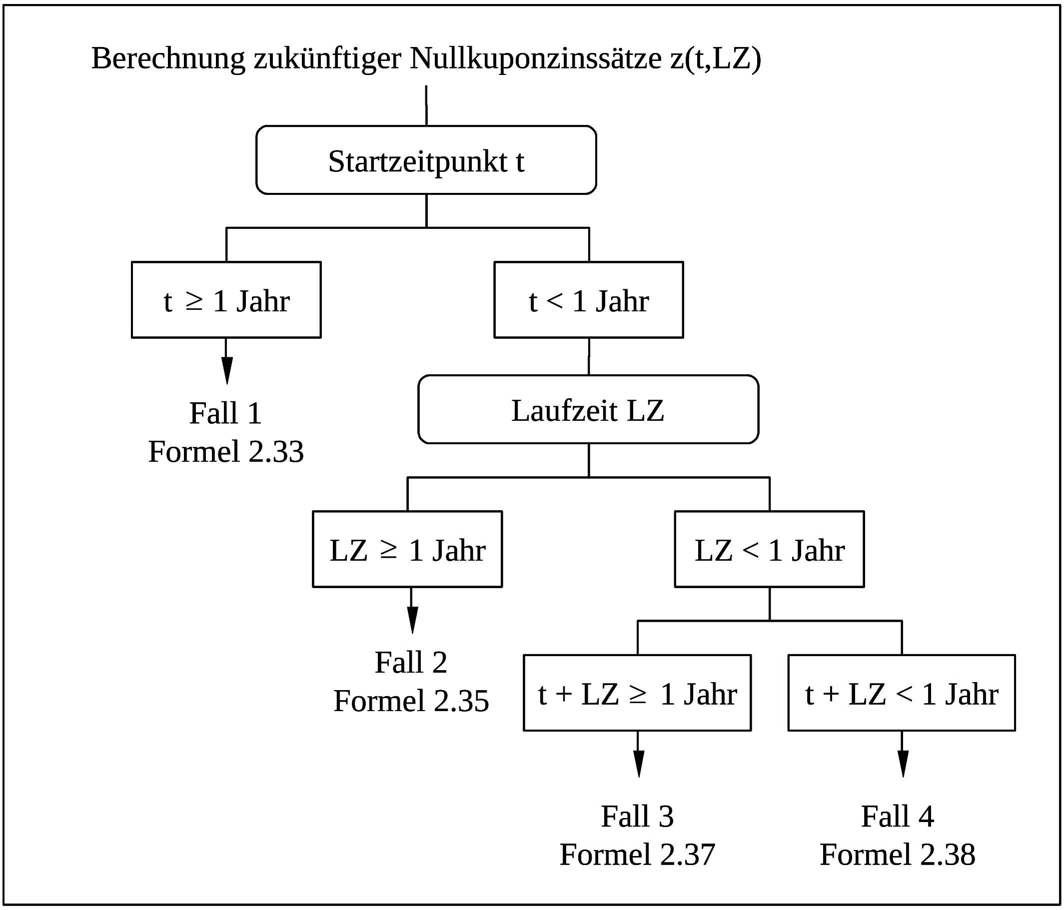

Abb. 22: Prüfschema zur Auswahl der richtigen Formel zur Berechnung von z(t,LZ)

Fall 1:
Wird ein zukünftiger Nullkuponzinssatz mit einem Startzeitpunkt gesucht, der erst in einem Jahr oder darüber hinaus beginnt, wird die nachfolgende Gleichung verwendet:

$$z(t, LZ) = \left(\frac{\left[1 + z(0, t + LZ)\right]^{\frac{t+LZ}{12}}}{\left[1 + z(0, t)\right]^{\frac{t}{12}}} \right)^{\frac{12}{LZ}} - 1 \qquad \begin{array}{l} t \geq 1 \text{ Jahr} \\ LZ \text{ beliebig} \\ t,\ LZ \text{ in Monaten} \end{array} \qquad (2.33)$$

Die Formel hat als Bedingung lediglich einen Startzeitpunkt t ≥ 1 Jahr. Die Laufzeit ist beliebig, d. h. sie kann sowohl über- als auch unterjährig sein. Sowohl der Startzeitpunkt als auch die Laufzeit können gebrochene Werte sein. Die Angaben für den Startzeitpunkt und die Laufzeit erfolgen in Monaten.

Als Beispiel sei der Nullkuponzins z(18M,6M) berechnet. Benötigt werden der Nullkuponzinssatz z(0,24M) = z(0,2) und der Nullkuponzinssatz z(0,18M). Der Nullkuponzinssatz z(0,2) ist bekannt und beläuft sich auf 4,02% (vgl. Abb. 4). Der Nullkuponzinssatz z(0,18M) kann mithilfe des Zerobond-Abzinsfaktors ZB-AF(0,18M) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} z(0{,}18M) &= \text{ZB-AF}(0{,}18M)^{-\frac{1}{LZ}} - 1 \\ &= 0{,}9494^{-\frac{1}{\frac{18}{12}}} - 1 = 3{,}52\% \end{aligned}$$

Setzt man die Werte in die Formel ein, ergibt sich ein Nullkuponzinssatz z(18M,6M) von 5,53%:

$$z(18M,6M) = \left(\frac{\left[1+z(0,24M)\right]^{\frac{24}{12}}}{\left[1+z(0,18M)\right]^{\frac{18}{12}}} \right)^{\frac{12}{6}} - 1 = \left(\frac{1{,}0402^{\frac{24}{12}}}{1{,}0352^{\frac{18}{12}}} \right)^{\frac{12}{6}} - 1 = 5{,}53\%$$

Für den Spezialfall ganzjähriger zukünftiger Nullkuponzinssätze z(t,LZ) kann Formel (2.33) wie folgt vereinfacht werden:

$$z(t,LZ) = \left(\frac{\left[1+z(0,t+LZ)\right]^{t+LZ}}{\left[1+z(0,t)\right]^{t}} \right)^{\frac{1}{LZ}} - 1 \qquad \begin{array}{l} t \geq 1 \text{ Jahr} \\ LZ \geq 1 \text{ Jahr} \\ t,\ LZ \text{ in Jahren} \end{array} \tag{2.34}$$

Zu beachten ist, dass in dieser Formel der Startzeitpunkt t und die Laufzeit LZ stets in ganzen Jahren angegeben werden. Als Anwendungsbeispiel sei der Nullkuponzinssatz z(1,2) berechnet. Wie in der folgenden Gleichung gezeigt wird, errechnet sich ein Wert von 6,12%. Die Berechnung der für die Formel notwendigen Nullkuponzinssätze z(0,3) und z(0,1) kann Abb. 10 entnommen werden.

$$z(1,2) = \left(\frac{\left[1+z(0,3)\right]^{3}}{\left[1+z(0,1)\right]^{1}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{1{,}0507^{3}}{1{,}03^{1}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 6{,}12\%$$

Alternativ können die Nullkuponzinssätze z(18M,6M) und z(1,2) auch über die korrespondierenden Zerobond-Abzinsfaktoren bestimmt werden:

$$z(18M,6M) = \text{ZB-AF}(18M,6M)^{-\frac{1}{\frac{6}{12}}} = 0{,}9734^{-\frac{12}{6}} = 5{,}53\%$$

$$z(1,2) = \text{ZB-AF}(1,2)^{-\frac{1}{2}} = 0{,}8879^{-\frac{1}{2}} = 6{,}12\%$$

Fall 2:
Bei unterjährigen Startzeitpunkten (t < 1 Jahr) ist zuerst zu unterscheiden, ob die Laufzeit ebenfalls unter- oder überjährig ist. Ist letzteres der Fall, erfolgt die Berechnung der zukünftigen Nullkuponzinssätze mithilfe der folgenden Gleichung:

$$z(t,LZ) = \left(\frac{\left[1 + z(0,t+LZ)\right]^{\frac{t+LZ}{12}}}{1 + z(0,t) \cdot \frac{t}{12}} \right)^{\frac{12}{LZ}} - 1 \qquad \begin{array}{l} t < 1\ \text{Jahr} \\ LZ \geq 1\ \text{Jahr} \\ t,\ LZ\ \text{in Monaten} \end{array} \qquad (2.35)$$

Formel (2.35) weicht von Gleichung (2.33) nur im Nenner ab. Durch den unterjährigen Startzeitpunkt fließt in den Nenner ein unterjähriger Nullkuponzinssatz ein. Wie alle unterjährigen Zinssätze wird auch dieser stets als Jahreszinssatz, d. h. per annum quotiert. Für den Einsatz in der Formel ist der Zinssatz daher zuerst auf die passende unterjährige Laufzeit zu skalieren. Dies geschieht, in dem man den Zinssatz mit seiner quotalen Jahreslaufzeit (t/12) multipliziert. Alle übrigen Bestandteile von Formel (2.33) bleiben unverändert.

Diese Fallunterscheidung trifft zum Beispiel für den Nullkuponzinssatz z(6M,12M) zu. Zur Berechnung des z(6M,12M) sind die Nullkuponzinssätze z(0,18M) und z(0,6M) notwendig. Ersterer ist bereits weiter vorne mithilfe des ZB-AF(0,18M) berechnet worden: z(0,18M) = 3,52%.

Der z(0,6M) wird trotz Unterjährigkeit stets per annum notiert. Er beläuft sich auf 2,00% (vgl. Kapitel 2.3.3). Die Skalierung auf sechs Monate erfolgt im Nenner der Formel (2.35), so dass der z(6M,12M) wie folgt berechnet werden kann:

$$z(6M,12M) = \left(\frac{\left[1 + z(0,18M)\right]^{\frac{18}{12}}}{1 + z(0,6M) \cdot \frac{6}{12}} \right)^{\frac{12}{12}} - 1 = \left(\frac{1{,}0352^{\frac{18}{12}}}{1 + 0{,}02 \cdot \frac{6}{12}} \right)^{\frac{12}{12}} - 1 = 4{,}29\%$$

Wird der Nullkuponzinssatz direkt aus den Zerobond-Abzinsfaktoren bestimmt, muss Formel (2.12) an den unterjährigen Startzeitpunkt angepasst werden:

$$z(t,LZ) = \left(\frac{1}{\text{ZB-AF}(t,LZ)} - 1 \right) \cdot \frac{12}{LZ} \qquad t < 12\ \text{Monate} \qquad (2.36)$$

Entsprechend ergibt sich aus dem ZB-AF(6M,12M) = 0,9589 (vgl. Abb. 21) ebenfalls ein Nullkuponzinssatz z(6M,12M) von 4,29%:

$$z(6M,12M)=\left(\frac{1}{\text{ZB-AF}(6M,12M)}-1\right)\cdot\frac{12}{12}=\left(\frac{1}{0,9589}-1\right)\cdot\frac{12}{12}=4,29\%$$

Fall 3:

Ist sowohl der Startzeitpunkt t als auch die Laufzeit LZ unterjährig, muss in einem weiteren Schritt geprüft werden, ob die Summe der beiden größer oder kleiner als ein Jahr ist. Wenn die Summe der beiden größer oder gleich ein Jahr ist, kommt die Gleichung (2.37) zum Tragen:

$$z(t,LZ)=\left(\frac{\left[1+z(0,t+LZ)\right]^{\frac{t+LZ}{12}}}{1+z(0,t)\cdot\frac{t}{12}}-1\right)\cdot\frac{12}{LZ}\qquad \begin{array}{l} t,\ LZ<1\text{ Jahr}\\ t+LZ\geq 1\text{ Jahr}\\ t,\ LZ\text{ in Monaten}\end{array} \tag{2.37}$$

Der Term in Klammern entspricht dem von Formel (2.35). Durch den unterjährigen Startzeitpunkt wird der per annum quotierte Nullkuponzinssatz im Nenner an die tatsächliche unterjährige Laufzeit angepasst. Da Startzeitpunkt und Laufzeit in dieser Konstellation in der Summe ein Jahr oder länger ergeben, kann für den Nullkuponzinssatz im Zähler weiterhin die überjährige Berechnungsvariante verwendet werden. Das Ergebnis des Klammerterms ist ein laufzeitadjustierter zukünftiger Nullkuponzinssatz. Da auch die unterjährigen zukünftigen Nullkuponzinssätze stets als per annum-Zins angegeben werden, muss in einem letzten Schritt durch den Faktor 12/LZ die Annualisierung erfolgen.

Die Vorgehensweise sei anhand des Nullkuponzinssatzes z(9M,9M) vorgestellt. Der Startzeitpunkt ist mit 9 Monaten unterjährig. Die Summe aus Startzeitpunkt und Laufzeit ergibt 18 Monate und ist daher überjährig. Benötigt werden die Nullkuponzinssätze z(0,18M) und z(0,9M). Der Nullkuponzinssatz z(0,18M) ist mit 3,52% bekannt. Der unterjährige Zinssatz z(0,9M) möge sich auf 2,50% p. a. belaufen. Er wird im Nenner der Formel auf 9 Monate skaliert. Setzt man alle Werte in Formel (2.37) ein, ergibt sich ein annualisierter Nullkuponzinssatz z(9M,9M) von 4,52%. Der laufzeitadjustierte Nullkuponzinssatz (Ergebnis der Klammer) beträgt 3,39%. Mit dem Faktor 12/9 wird der laufzeitadjustierte Zins von 9 Monaten auf ein volles Jahr hochskaliert.

$$z(9M,9M) = \left(\frac{[1 + z(0,18M)]^{\frac{18}{12}}}{1 + z(0,9M) \cdot \frac{9}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{9} = \left(\frac{1,0352^{\frac{18}{12}}}{1 + 0,025 \cdot \frac{9}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{9}$$
$$= 4,52\ \%$$

Das gleiche Ergebnis wird durch Anwendung der Formel (2.36) erreicht. Hierfür ist im ersten Schritt die Bestimmung des ZB-AF(9M,9M) notwendig, der sich wiederum aus dem ZB-AF(0,18M) und dem ZB-AF(0,9M) zusammensetzt.

$$\begin{aligned} \text{ZB-AF}(9M,9M) \quad &= \text{ZB-AF}(0,18M) \cdot \frac{1}{\text{ZB-AF}(0,9M)} \\ &= 0,9494 \cdot \frac{1}{1 + 0,025 \cdot \frac{9}{12}} = \frac{0,9494}{0,9816} \\ &= 0,9672 \end{aligned}$$

Im Anschluss kann der Nullkuponzinssatz z(9M,9M) bestimmt werden:

$$z(9M,9M) = \left(\frac{1}{\text{ZB-AF}(9M,9M)} - 1 \right) \cdot \frac{12}{9} = \left(\frac{1}{0,9672} - 1 \right) \cdot \frac{12}{9} = 4,52\%$$

Fall 4:
Die letzte Variante ist die Kombination aus unterjährigem Startzeitpunkt und unterjähriger Laufzeit, deren Summe unterjährig ist. Zukünftige Nullkuponzinssätze in dieser Konstellation lassen sich mithilfe von Formel (2.38) berechnen:

$$z(t,LZ) = \left(\frac{1 + z(0,t+LZ) \cdot \frac{t+LZ}{12}}{1 + z(0,t) \cdot \frac{t}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{LZ} \qquad \begin{array}{l} t,\ LZ < 1 \text{ Jahr} \\ t + LZ < 1 \text{ Jahr} \\ t,\ LZ \text{ in Monaten} \end{array} \tag{2.38}$$

Bekannt ist bereits, dass bei unterjähriger Laufzeit eines Zinssatzes eine Adjustierung an die tatsächliche Laufzeit erfolgen muss. Da nunmehr auch die Summe aus Startzeitpunkt und Laufzeit unterjährig ist, ist diese Adjustierung auch für den Nullkuponzinssatz im Zähler durchzuführen. Alle weiteren Komponenten sind identisch mit denen von Formel (2.37).
Als Beispiel sei der Nullkuponzinssatz z(6M,3M) berechnet. Benötigt werden der Nullkuponzinssatz z(0,6M) und z(0,9M). Beide sind mit 2,00% p. a. respektive 2,50% p. a. bereits bekannt. Es ergibt sich ein zukünftiger Nullkuponzinssatz z(6M,3M) von 3,47%.

$$z(6M,3M)=\left(\frac{1+z(0,9M)\cdot\frac{9}{12}}{1+z(0,6M)\cdot\frac{6}{12}}-1\right)\cdot\frac{12}{3}=\left(\frac{1+0,025\cdot\frac{9}{12}}{1+0,02\cdot\frac{6}{12}}-1\right)\cdot\frac{12}{3}=3,47\%$$

Für die Berechnung aus Zerobond-Abzinsfaktoren ist der entsprechende ZB-AF(6M,3M) zu ermitteln. Auch die Berechnung auf dessen Basis führt zu einem Nullkuponzinssatz von 3,47%.

$$\text{ZB-AF}(6M,3M)=\frac{\text{ZB-AF}(0,9M)}{\text{ZB-AF}(0,6M)}=\frac{0,9816}{0,9901}=0,9914$$

$$z(6M,3M)=\left(\frac{1}{\text{ZB-AF}(6M,3M)}-1\right)\cdot\frac{12}{3}=\left(\frac{1}{0,9914}-1\right)\cdot\frac{12}{3}=3,47\%$$

Ausgehend von den gezeigten Gleichungen können nun Nullkuponzinssätze für sämtliche Bewertungszeitpunkte und Laufzeiten bestimmt werden. Abb. 23 zeigt einige Beispiele, wobei zusätzlich die jeweils verwendete Formel in Klammern angegeben ist.

t \ LZ	3M	6M	9M	12M	15M	18M
0	1,50%	2,00%	2,50%	3,00%	3,26%	3,52%
6M	3,47% (2.38)	3,96% (2.37)	4,09% (2.37)	4,29% (2.35)		
9M	4,42% (2.37)	4,36% (2.37)	4,52% (2.37)			
18M	5,30% (2.33)	5,53% (2.33)				

Abb. 23: Nullkuponzinssätze z (t,LZ)

2.5.3 Kupon-Forwardzinssätze

Im letzten Kapitel wurde beschrieben, wie sich zukünftige Nullkuponzinssätze berechnen lassen. Diese werden in der Praxis, ebenso wie **zukünftige Kuponzinssätze**, als **Forward-Zinssätze**, kurz **Forwards**, bezeichnet. Dabei sind die Kupon-Forwards mit einer Laufzeit von jeweils nur einem Jahr oder weniger identisch mit den bereits oben berechneten zukünftigen Nullkuponzinssätzen. Die noch fehlenden Kupon-Forwards mit Laufzeiten über einem Jahr lassen sich mit folgender Formel berechnen (vgl. MARUSEV/PFINGSTEN 1992, S. 6):

$$i(t, LZ) = \frac{1 - \text{ZB-AF}(t,LZ)}{\sum_{n=1}^{LZ} \text{ZB-AF}(t,n)} \tag{2.39}$$

Ist zum Beispiel der Kupon-Forwardzinssatz i(2,3) gesucht, muss folgende Rechnung durchgeführt werden:

$$i(2,3) = \frac{1 - \text{ZB-AF}(2,3)}{\sum_{n=1}^{3} \text{ZB-AF}(2,n)} = \frac{1 - \text{ZB-AF}(2,3)}{\text{ZB-AF}(2,1) + \text{ZB-AF}(2,2) + \text{ZB-AF}(2,3)}$$

$$= \frac{1 - 0{,}7603}{0{,}9328 + 0{,}8519 + 0{,}7603} = 9{,}42\%$$

Kalkuliert man mit dieser Formel die noch fehlenden Kupon-Forwards für die bekannte normale Zinsstrukturkurve erhält man das in Abb. 24 gezeigte Ergebnis.

Laufzeit (LZ) / Beginn (t)	1	2	3	4	5
0	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%	7,00%
1	5,05%	6,09%	7,13%	8,18%	
2	7,20%	8,30%	9,42%		
3	9,50%	10,70%			
4	12,04%				

Abb. 24: Kuponzinssätze und Kupon-Forwards i(t,LZ)

Die Kupon-Forwards sind bei einer normalen Strukturkurve immer kleiner als die entsprechenden Nullkuponzinssätze, da letztere den Zinseszinseffekt mit berücksichtigen. Umgekehrt liegt die Kupon-Forward-Kurve bei einer inversen Struktur immer über der Nullkupon-Kurve (vgl. Abb. 25).

Aufbauend auf Gleichung (2.39) lässt sich auch ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen Kupon- und Nullkupon-Forwards aufstellen. Es gilt:

$$i(t,LZ) = \frac{1-\left(1+z\left(t,LZ\right)\right)^{-LZ}}{\sum_{n=1}^{LZ}\left(z\left(t,n\right)+1\right)^{-n}} \tag{2.40}$$

Auf Basis dieser Überlegungen kann nun die zu Beginn des Abschnitts 2.2.2 aufgeworfene Frage, wie sich die mittels des Bootstrapping-Verfahrens gewonnene Nullkuponzinsstrukturkurve in eine Kuponzinsstrukturkurve umwandeln lässt, beantwortet werden. Da Zinsstrukturkurven ausschließlich im Zeitpunkt t = 0 beginnende Zinssätze (Kassazinsätze) enthalten, gilt:

$$i(0,LZ) = \frac{1-\left(1+z\left(0,LZ\right)\right)^{-LZ}}{\sum_{n=1}^{LZ}\left(z\left(0,n\right)+1\right)^{-n}} \tag{2.41}$$

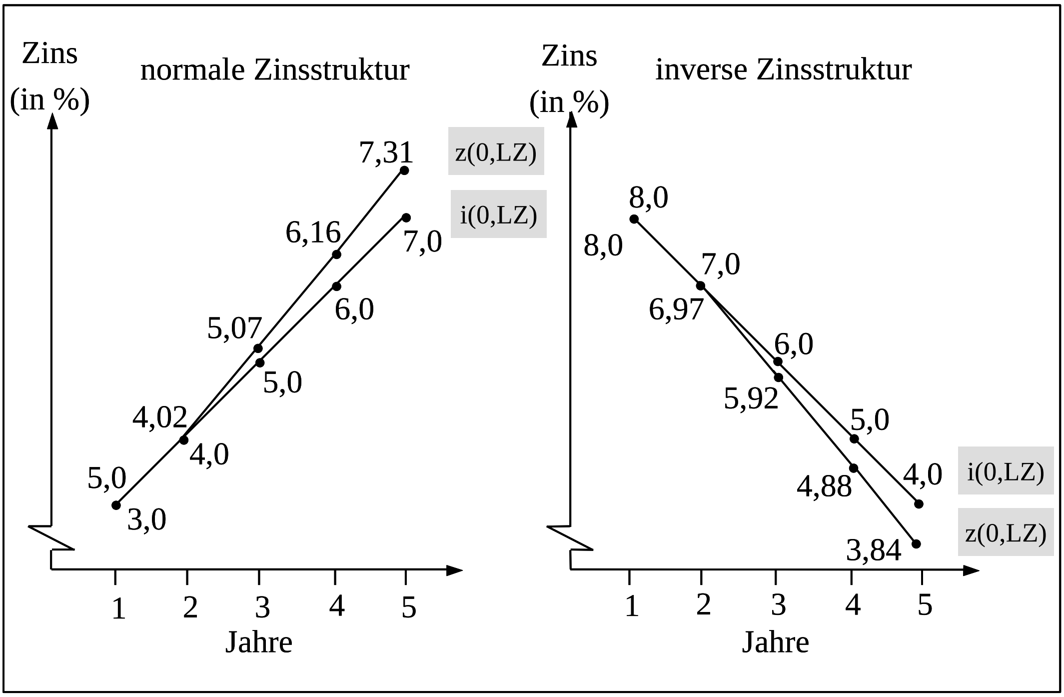

Abb. 25: Kupon- und Nullkuponzinssätze im Vergleich

2.6 Stetiger Zinssatz

2.6.1 Überjährige stetige Verzinsung

Bislang wurde angenommen, dass die Zinsen an eindeutig definierten (diskreten) Zahlungszeitpunkten fällig sind. Vergrößert man die Anzahl der Zinszahlungstermine, werden die Zinsperioden immer kleiner. Wird dieser Vorgang bis ins Unendliche fortgeführt, gelangt man zur **stetigen Verzinsung**, d. h. die fälligen Zinsen werden unmittelbar wieder angelegt. Daher wird die stetige Verzinsung auch als **kontinuierliche Verzinsung** bezeichnet. Der am Ende der Laufzeit sich ergebende Betrag NV_{t+LZ} errechnet sich wie folgt:

$$NV_{t+LZ} = NV_t \cdot e^{r(t,LZ)\cdot LZ} \tag{2.42}$$

Der Startbetrag, d. h. das Nominalvolumen zu Beginn der Laufzeit wird dabei als NV_t bezeichnet. Die Variable r stellt den stetigen Zinssatz dar. Dieser berechnet sich für den heutigen Bewertungszeitpunkt und überjährige Laufzeiten entsprechend der Formel

$$r(0,LZ) = \ln(1+z(0,LZ)) \qquad LZ > 1\,\text{Jahr} \tag{2.43}$$

Der Faktor $e^{r(t,LZ)\cdot LZ}$ zinst eine Zahlung NV vom Zeitpunkt t auf den Zeitpunkt t + LZ auf, der Kehrwert $e^{-r(t,LZ)\cdot LZ}$ zinst diese entsprechend wieder ab. Somit hat letzterer Term die gleiche Funktion wie der Zerobond-Abzinsfaktor und muss mit diesem übereinstimmen:

$$e^{-r(t,LZ)\cdot LZ} \overset{!}{=} \text{ZB-AF}(t,LZ) \tag{2.44}$$

Ausgehend von einem einjährigen Nullkuponzinssatz von 3,00% berechnet sich der laufzeitgleiche stetige Zinssatz entsprechend Formel (2.43):

$$r(0,1) = \ln(1+0{,}03) = 2{,}95588\%$$

Der stetige Zinssatz ist stets kleiner als der Kupon- und der Nullkuponzinssatz, da der Zinseszinseffekt aufgrund der kontinuierlichen Verzinsung größer ist. Der Abzinsfaktor

$$e^{-r(t,LZ)\cdot LZ} = e^{-0{,}0295588\cdot 1} = 0{,}9709$$

stimmt wie gefordert mit dem ZB-AF(0,1) überein (vgl. Abb. 19). Diese Zusammenhänge gelten ebenfalls für Laufzeiten größer als ein Jahr, wie das Beispiel des stetigen Zinssatzes für drei Jahre zeigt:

$$z(0,3) = 5{,}07\ \% \qquad \Rightarrow\ r(0,3) = \ln(1+0{,}0507) = 4{,}94566\%$$

$$e^{-\,r(t,LZ)\cdot LZ} = e^{-\,0{,}0494566\cdot 3} = 0{,}8621; \qquad \text{ZB-AF}(0,3) = 0{,}8621$$

Es ist auch möglich, stetige zukünftige Zinssätze zu berechnen. Wie bereits bei der Berechnung zukünftiger Nullkuponzinssätze kennen gelernt, greift man hierzu auf die Zinssätze mit Startzeitpunkt t = 0 zurück. Die Berechnung basiert auf folgender Formel:

$$r(t,LZ) = \frac{r(0,t+LZ)\cdot(t+LZ) - r(0,t)\cdot t}{LZ} \tag{2.45}$$

Beispielhaft sei der stetige Zinssatz, der in einem Jahr für zwei Jahre gilt, berechnet. Benötigt werden die stetigen Zinssätze r(0,3) und r(0,1). Setzt man die Werte in die Formel ein, ergibt sich für r(1,2) ein Zinssatz von 5,94%.

$$r(1,2) = \frac{r(0,3)\cdot 3 - r(0,1)\cdot 1}{2} = \frac{0{,}0494566\cdot 3 - 0{,}0295588\cdot 1}{2} = 5{,}94055\%$$

Auch hier stimmt der Abzinsfaktor mit dem ZB-AF überein:

$$e^{-\,r(t,LZ)\cdot LZ} = e^{-0{,}0594055\cdot 2} = 0{,}8880; \qquad \text{ZB-AF}(1,2) = 0{,}8880$$

Für ungerade Laufzeiten und Bewertungszeitpunkte kann die Berechnung analog erfolgen. Lediglich die Kombination aus heutigem Bewertungszeitpunkt und unterjähriger Laufzeit muss separat betrachtet werden, was im nächsten Unterkapitel geschieht.

2.6.2 Unterjährige stetige Verzinsung

Liegt der Startzeitpunkt für einen stetigen Zins mit unterjähriger Laufzeit in t = 0, wird der stetige Zins wie folgt berechnet:

$$r(0,LZ) = \frac{\ln\left(1 + z(0,LZ)\cdot\frac{LZ}{Basis}\right)}{\frac{LZ}{Basis}} \qquad LZ < Basis \tag{2.46}$$

Der Unterschied zu Formel (2.45) ergibt sich aus der bekannten Laufzeitadjustierung der Zinssätze. Angepasst werden muss zuerst der Nullkuponzinssatz in der Klammer an die tatsächliche Laufzeit. Der logarithmierte Wert ergibt den stetigen Zins für die unterjährige Laufzeit. Um diesen dann wieder an die gewohnte per annum-Schreibweise anzupassen, muss der Zinssatz anschließend wieder auf ein ganzes Jahr skaliert werden. Dies geschieht durch die Division mit dem Term LZ/Basis. Alternativ könnte auch mit dem Term Basis/LZ multipliziert werden, um die Analogie zur Schreibweise bei den Formeln für unterjährige Nullkuponzinssätze herzustellen.

Als Beispiel sei der stetige Zins r(0,6M) berechnet:

$$r(0,6M) = \frac{\ln\left(1+0,02\cdot\frac{6}{12}\right)}{\frac{6}{12}} = 0,0199\%$$

Auch hier entspricht der unterjährige Abzinsfaktor $e^{-r(t,LZ)\cdot LZ}$ dem laufzeitadäquaten Zerobond-Abzinsfaktor.

$$e^{-0,0199\cdot\frac{6}{12}} = 0,9901 \qquad\qquad \text{ZB-AF}(0,6M) = 0,9901$$

Der stetige Zinssatz ist vor allem für Modelle relevant, deren Ziel die Bewertung von Optionen ist (vgl. Kap. 4).

2.7 Kalkulatorische Dreiecksbeziehung

Die Ausführungen haben gezeigt, wie und mit welchen Werkzeugen Zahlungen auf der Zeitachse verschoben werden können. Systematisieren lassen sich diese anhand von drei Kriterien: dem Startzeitpunkt, der Transformationsrichtung und dem Transformationszeitraum. Mithilfe dieser drei Kriterien lassen sich sämtliche Möglichkeiten der Zahlungsstromtransformation durch den in Abb. 26 dargestellten **Kalkulationszinswürfel** beschreiben (vgl. SCHIERENBECK/ WIEDEMANN 1996, S. 11).

Hinsichtlich des **Startzeitpunkts** kann zwischen der Bewertung heute oder in der Zukunft unterschieden werden. Die **Transformationsrichtung** gibt an, ob die jeweilige Zahlung auf- oder abgezinst werden soll. Der **Transformationszeitraum** kann sowohl überjährig als auch unterjährig sein. Alle dargestellten Kalkulationsgrößen werden auf Basis der aktuellen Renditestrukturkurve berechnet. Zunächst werden dabei die Zerobond-Ab- und -Aufzinsfaktoren sowie die Nullkuponzinssätze für den heutigen Zeitpunkt mit den verschiedenen Laufzeiten ermittelt. Daraus lassen sich anschließend die zukünftigen Zerobond-Ab- bzw.

-Aufzinsfaktoren, die Nullkupon- und die Forward-Zinssätze generieren. Sämtliche Größen stehen folglich in einem eindeutigen mathematischen Zusammenhang, der in Abb. 27 noch einmal zusammengestellt ist.

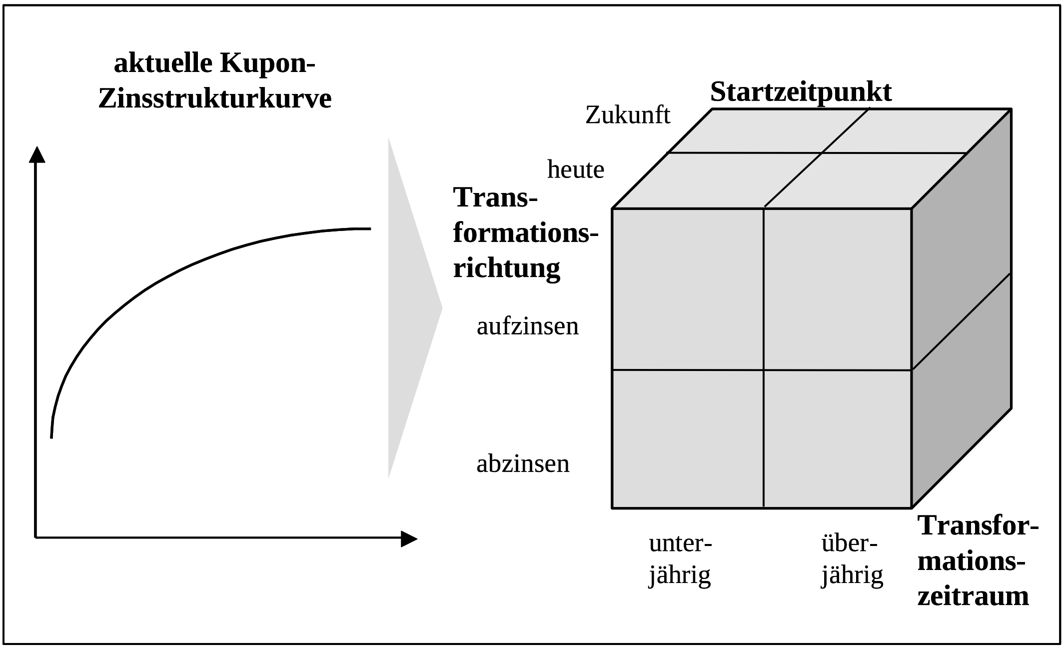

Abb. 26: Kalkulationszinswürfel

Anhand der Kalkulationsgrößen mit Beginn in einem Jahr (t = 1) und einer Laufzeit von 3 Jahren (LZ = 3) wird der Zusammenhang deutlich:

$$\text{ZB-AF}(1,3) \cdot \text{ZB-UF}(1,3) = 1$$

$$0{,}8109 \cdot 1{,}2332 = 1$$

oder:

$$\text{ZB-AF}(1,3) \cdot (1+z(1,3))^3 = 1$$

$$0{,}8109 \cdot (1+0{,}0724)^3 = 1$$

Als EXCEL-Tool zur Berechnung der ganzjährigen Zahlungsstrom-Transformatoren steht im Download-Bereich von www.zinsrisiko.de der ZB-Master zur Verfügung.

Aktuelle Kupon-Zinssätze i(0,LZ)					
LZ	1	2	3	4	5
i (0,LZ)	3%	4%	5%	6%	7%

ZB-AF (t,LZ)	1	2	3	4	5
0	0,9709	0,9242	0,8621	0,7873	0,7027
1	0,9519	0,8880	0,8109	0,7238	
2	0,9328	0,8519	0,7603		
3	0,9132	0,8151			
4	0,8925				

ZB-UF (t,LZ)	1	2	3	4	5
0	1,0300	1,0820	1,1600	1,2702	1,4231
1	1,0505	1,1263	1,2332	1,3816	
2	1,0720	1,1738	1,3153		
3	1,0950	1,2268			
4	1,1204				

Beispiel

$$0,8109 \cdot 1,2332 = 1$$

$$0,8109 \cdot (1 + 0,0724)^3 = 1$$

z (t,LZ)	1	2	3	4	5
0	3,00%	4,02%	5,07%	6,16%	7,31%
1	5,05%	6,13%	7,24%	8,42%	
2	7,20%	8,34%	9,56%		
3	9,51%	10,76%			
4	12,04%				

Abb. 27: Kalkulatorische Dreiecksbeziehung

2.8 Barwertberechnung

2.8.1 Barwertberechnung bei flacher Zinsstrukturkurve

Der **Barwert** eines Finanzinstrumentes oder allgemein einer Zahlung ist immer dessen Wert im Bewertungszeitpunkt heute (t = 0). Anhand eines einheitlichen Beispiels werden im Folgenden die verschiedenen Methoden zur Barwertermittlung dargestellt und verglichen.

Das Beispiel generiert Auszahlungen in Höhe von 50.000 EUR in einem und in zwei Jahren sowie eine weitere Zahlung in Höhe von 1.050.000 EUR in drei Jahren. Unterstellt sei zunächst eine **flache Zinsstrukturkurve** mit einem einheitlichen Zinssatz von 7%. Die Berechnung des Barwertes zeigt Abb. 28.